

1.

1.1. A reta FC é definida pela equação vetorial:

$$(x, y, z) = (-5, 2, 14) + k(-5, -1, 7), k \in \mathbb{R}$$

Assim, uma reta paralela à reta FC tem de apresentar um vetor diretor colinear com o vetor de coordenadas $(-5, -1, 7)$, o que exclui as opções (A) e (B).

Sabe-se também que a reta pretendida passa no ponto A de coordenadas $(0, 4, 0)$.

O ponto A pertence ao semieixo positivo Oy e $\overline{OA} = 4$. Das opções apresentadas em (C) e em (D), vejamos qual delas apresenta uma equação vetorial de uma reta que, além de ter um vetor diretor colinear com $(-5, -1, 7)$, contém o ponto A :

$$\begin{aligned} \bullet \quad (0, 4, 0) &= (-10, 2, 14) + k(5, 1, -7) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -10 + 5k \\ 4 = 2 + k \\ 0 = 14 - 7k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases} \\ \bullet \quad (0, 4, 0) &= (10, 2, -14) + k(5, 1, -7) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 10 + 5k \\ 4 = 2 + k \\ 0 = -14 - 7k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = 2 \\ k = -2 \end{cases} \quad \text{Condição impossível} \end{aligned}$$

Opção (C)

1.2. A superfície esférica que contém todos os vértices do cubo apresentado é a superfície esférica de diâmetro $[FC]$.

Determinemos as coordenadas dos pontos F e C .

• O ponto F pertence ao plano xOy e à reta FC :

$$\begin{aligned} F(x, y, 0): \quad (x, y, 0) &= (-5, 2, 14) + k(-5, -1, 7) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 - 5k \\ y = 2 - k \\ 0 = 14 + 7k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 10 \\ y = 2 - (-2) \\ k = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \\ k = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

As coordenadas do ponto F são $(5, 4, 0)$.

- O ponto C pertence ao plano definido pela equação $x = 0$ e à reta FC :

$$C(0, y, z): (0, y, z) = (-5, 2, 14) + k(-5, -1, 7) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 - 5k \\ y = 2 - k \\ 0 = 14 + 7k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = 2 - (-1) \\ z = 14 + 7 \times (-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = 3 \\ z = 7 \end{cases}$$

As coordenadas do ponto C são $(0, 3, 7)$.

Determinemos a equação da superfície esférica.

- Centro da superfície esférica pretendida:

$$\text{Ponto médio de } [FC]: \left(\frac{5+0}{2}, \frac{4+3}{2}, \frac{0+7}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

- Raio da superfície esférica pretendida:

$$\frac{\overline{FC}}{2} = \frac{\sqrt{(5-0)^2 + (4-3)^2 + (0-7)^2}}{2} = \frac{\sqrt{25+1+49}}{2} = \frac{\sqrt{75}}{2}$$

- Equação da superfície esférica pretendida:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{75}{4}$$

2. Seja (u_n) a progressão aritmética de razão r .

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_5 = 26 \\ u_9 = 31 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4r = 26 \\ u_1 + 8r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 4r = 26 \\ \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2r = 13 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 13 - 2r \\ 13 - 2r + 8r = 31 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6r = 18 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 13 - 2 \times 3 \\ r = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ r = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, o termo geral de (u_n) pode ser dado por $u_n = 7 + (n - 1) \times 3$, isto é,

$$u_n = 3n + 4.$$

835 é termo da progressão (u_n) , se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $u_n = 835$.

$$u_n = 835$$

$$3n + 4 = 835 \Leftrightarrow 3n = 831$$

$$\Leftrightarrow n = 277$$

Assim, 835 é termo da progressão.

3. $A(a, 0)$

$$B(a + 4, 0)$$

$$C(a + 4, f(a + 4)), \text{ isto é, } C(a + 4, \log_{2a}(a + 4))$$

$$D(a, f(a)), \text{ isto é, } D(a, \log_{2a}(a))$$

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{AB}, \text{ onde:}$$

- $\overline{AD} = \log_{2a}(a)$
- $\overline{BC} = \log_{2a}(a + 4)$
- $\overline{AB} = a + 4 - a = 4$

Assim:

$$\frac{\log_{2a}(a) + \log_{2a}(a + 4)}{2} \times 4 = 4 \Leftrightarrow \log_{2a}(a \times (a + 4)) = 2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a = (2a)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 4a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(3a - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \quad \vee \quad 3a - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \quad \vee \quad a = \frac{4}{3}$$

Como $a > 1$, tem-se que $a = \frac{4}{3}$.

4.

- Introduzindo os dados referentes à remuneração base média mensal dos homens, em euros, numa lista na calculadora gráfica, no modo ESTATÍSTICA, podemos obter a mediana (Me), o quartil 1 (Q_1) e o quartil (Q_3).

$$Me = 904,6; Q_1 = 674,7 \text{ e } Q_3 = 990,1$$

$$\text{Amplitude interquartil: } Q_3 - Q_1 = 990,1 - 674,7 = 315,4$$

Assim, **I – c)** e **II – a)**.

- De 2015 para 2020, a remuneração base média mensal das mulheres teve um aumento de 135,3 euros ($960,3 - 825,0 = 135,3$), o que corresponde a um aumento percentual de 16,4%. Assim, **III – b)**.

Cálculo auxiliar

$$825,0 \times x = 135,3 \Leftrightarrow x = \frac{135,3}{825,0}$$

$$\Leftrightarrow x = 0,164$$

- Introduzindo os dados das variáveis x e y , apresentados na tabela, em duas listas na calculadora gráfica, no modo ESTATÍSTICA, podemos obter o coeficiente de correlação linear r destas variáveis, $r \approx 0,998$. Assim, **IV – c)**.

$$5. \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QP} = 27$$

$$\|\overrightarrow{QR}\| \cdot \|\overrightarrow{QP}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 27$$

$$\|\overrightarrow{QP}\| = \text{diâmetro} = 2 \times 3 = 6$$

$$\|\overrightarrow{QR}\| \times 6 \times \sin \alpha = 27 \Leftrightarrow 6 \sin \alpha \times 6 \times \sin \alpha = 27$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{27}{36}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como α é um ângulo agudo, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, logo $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad.

Cálculo auxiliar

$$\sin \alpha = \frac{\overrightarrow{QR}}{6} \Leftrightarrow \overrightarrow{QR} = 6 \sin \alpha$$

6.

6.1. Por definição de assíntota oblíqua ao gráfico de g , tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - (3x - 5)) = 0$$

ou seja:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 3x + 5) = 0$$

Opção (D)

6.2. Sabendo que g é contínua em $x = 0$, tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = f(0) = 2$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-k}(e^x - 1)}{-x^2 + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-k}(e^x - 1)}{x(-x + 2)} = \\ &= e^{-k} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{-x + 2} = \\ &= e^{-k} \times 1 \times \frac{1}{-0 + 2} = \\ &= \frac{e^{-k}}{2} \end{aligned}$$

Assim:

$$\frac{e^{-k}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{-k} = 4$$

$$\Leftrightarrow k = -\ln 4$$

7.1. Número de casos possíveis: $6 \times 6 \times 6 = 216$

Número de casos favoráveis: $2 \times 2 \times 4 \times 3 = 48$

Probabilidade pretendida: $\frac{48}{216} = \frac{2}{9}$

7.2. Nas condições pretendidas, o número terá de ter 2, 4 ou 6 como algarismo das unidades (para ser par) e o algarismo 1 ou 2 como algarismo das centenas de milhar (para ser inferior a 300 000).

- $$\frac{1}{1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2} = 2,4 = 12$$
- os restantes
algarismos
(3,5 e 6)

- Começa em 1 e acaba em 6:

$$1 \times \frac{2!}{0! 2! 0! 4!} \times \underbrace{2 \times 1}_{\substack{\text{os} \\ \text{restantes} \\ \text{algarismos} \\ (3 \text{ e } 5)}} \times 1 \times \frac{3}{\substack{\text{número} \\ \text{de} \\ \text{maneiras} \\ \text{de} \\ \text{colocar o} \\ 2 \text{ e } 0 \text{ e } 4 \\ \text{juntos}}} = 12$$

- $$\underbrace{2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{\substack{\text{os restantes} \\ \text{algoritmos} \\ (3,5 \text{ e } 6)}} \times 6 = 6$$

8. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

©Edições ASA, *Matemática A*, 2024

$$\Leftrightarrow 2P(B) = 8P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 4P(A \cap B)$$

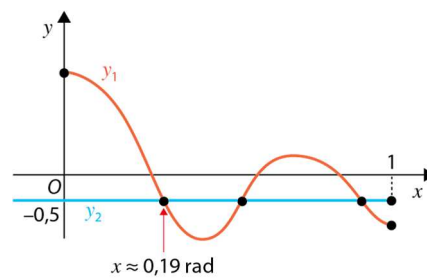
Assim:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{4P(A \cap B)} = \frac{1}{4}$$

9. Pretende-se o primeiro instante em que $y(t) = -0,5$.

Seja x a variável independente.

Colocando na calculadora gráfica as expressões $y_1 = 7,5e^{-1,5x}\text{sen}(8,6x + 1,6)$ e $y_2 = -0,5$, obtém-se a seguinte representação gráfica:



Assim, o valor pretendido, arredondado às centésimas, é 0,19 radianos.

10. A proposição I é falsa, pois o gráfico da função f não pode ter a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$, já que f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$, logo f'' será sempre não negativa em $\mathbb{R}^+$, ou seja, o gráfico de f terá a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}^+$.

A proposição II é falsa, já que, no intervalo $]1, 5[$, a função f não pode ter qualquer extremo, pois, como $f'(1) = 2 > 0$ e f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$, não existem zeros de f' em $]1, 5[$. Sendo f diferenciável e não existindo zeros de f' nesse intervalo, então f não tem extremos nesse intervalo.

11.

- 11.1. Seja m o declive da reta r : $m = g'(0) = \cos 0 + 2\text{sen}0 = 1$

Como a reta r é paralela à reta s , então tem o mesmo declive. Assim, a equação reduzida da reta s é do tipo $y = x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(4, 0)$ pertence à reta s , vem que $0 = 4 + b \Leftrightarrow b = -4$.

Assim, a equação reduzida da reta s é $y = x - 4$.

- 11.2. $g'(x) = \cos(2x) + 2\text{sen}x$

$$g''(x) = -2\text{sen}(2x) + 2\cos x$$

$$g''(x) = 0$$

$$-2\text{sen}(2x) + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow -\text{sen}(2x) + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\text{sen } x \cos x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(-2\text{sen } x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee -2\text{sen } x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \text{sen } x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, o zero de g'' é $\frac{\pi}{6}$.

	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$2\cos x$		+	+	+	
$-2\text{sen } x + 1$		+	0	-	
Sinal de g''		+	0	-	
Sentido das concavidades do gráfico de g		∪	P.l.	∩	

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} g''(x) &= -2\text{sen}(2x) + 2\cos x = \\ &= -4\text{sen } x \cos x + 2\cos x = \\ &= 2\cos x(-2\text{sen } x + 1) \end{aligned}$$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$ e voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Tem um ponto de inflexão de abscissa $x = \frac{\pi}{6}$.

12. $z = -2i = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$, logo o número complexo que tem como afixo o transformado do ponto A por uma rotação de centro na origem e de ângulo orientado de amplitude $\frac{\pi}{3}$ é:

$$\begin{aligned} 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)} &= 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \\ &= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \\ &= \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

Opção (A)

$$\begin{aligned}
 13. w &= \frac{-1-\sqrt{3}i}{e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}} = \frac{2e^{i\frac{4\pi}{3}}}{e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}} = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)} = \\
 &= 2e^{i\frac{25\pi}{12}} = \\
 &= 2e^{i\frac{\pi}{12}}
 \end{aligned}$$

Como w é uma das raízes sextas de z , então $w^6 = z$.

$$z = \left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^6 = 2^6 \times e^{i\left(\frac{6\pi}{12}\right)} = 64 e^{i\frac{\pi}{2}} = 64i$$

$$\text{Assim, } iz = i \times 64i = 64i^2 = -64.$$

Cálculos auxiliares

$$-1 - \sqrt{3}i = 2e^{i\theta}$$

$$\bullet \quad |-1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\bullet \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} \wedge \theta \in 3.^\circ \text{Q}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}, \text{ por exemplo.}$$

$$-1 - \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

14. Por definição de derivada de uma função num ponto, $f'(-a) = \lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)}$ e, pelo

enunciado, $f'(a) = f(a)$. Assim:

$$\begin{aligned}
 f'(-a) \times f'(a) &= \lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} \times f(a) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(x)-f(a)}{x+a} \times f(a) = & (f(-a) = f(a), \text{ pois } f \text{ é par}) \\
 &= \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(-y)-f(a)}{-y+a} \times f(a) = & (\text{mudança de variável: } y = -x) \\
 &= \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(y)-f(a)}{-(y-a)} \times f(a) = & (f(-y) = f(y), \text{ pois } f \text{ é par}) \\
 &= - \lim_{y \rightarrow a} \underbrace{\frac{f(y)-f(a)}{y-a}}_{f'(a)} \times f(a) = \\
 &= -f'(a) \times f(a) = \\
 &= -f(a) \times f(a) = & (\text{pelo enunciado, } f'(a) = f(a)) \\
 &= -(f(a))^2 \quad \text{c.q.d.}
 \end{aligned}$$