

1. Como o gráfico da função f se desloca 2 unidades para a direita ($f(x - 2)$) e 1 unidade para cima ($f(x - 2) + 1$), o contradomínio de g é $[-1 + 1, 3 + 1]$, isto é, $[0, 4]$.

Opção (C)

2.

2.1. Sejam V e E os acontecimentos:

V : “Ser violinista.”

E : “Ser estrangeiro.”

Sabe-se que:

- $P(V) = \frac{3}{5} = 0,6$
- $P(E) = P(\overline{E}) = 0,5$
- $P(\overline{V}|E) = \frac{3}{10} = 0,3$

Pretende-se calcular o valor de $P(\overline{E}|V)$.

Organizando os dados numa tabela:

	E	$\overline{E}$	Total
V	0,35	0,25	0,6
$\overline{V}$	0,15		0,4
Total	0,5	0,5	1

Assim:

$$\begin{aligned}
 P(\overline{E}|V) &= \frac{P(\overline{E} \cap V)}{P(V)} = \\
 &= \frac{0,25}{0,6} = \\
 &= \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

- $P(\overline{V}) = 1 - P(V) = 1 - 0,6 = 0,4$
- $P(\overline{V}|E) = 0,3 \Leftrightarrow \frac{P(\overline{V} \cap E)}{P(E)} = 0,3$
 $\Leftrightarrow \frac{P(\overline{V} \cap E)}{0,5} = 0,3$
 $\Leftrightarrow P(\overline{V} \cap E) = 0,3 \times 0,5$
 $\Leftrightarrow P(\overline{V} \cap E) = 0,15$
- $P(V \cap E) = 0,5 - 0,15 = 0,35$
- $P(V \cap \overline{E}) = 0,6 - 0,35 = 0,25$

2.2.

$\frac{2}{2}$
 número de maneiras de
 escolher 1 das 2 filas onde
 podem ficar os contrabaixistas

$\times$ $\frac{4}{3} A_3$
 número de maneiras de
 escolher ordenadamente
 3 dos 4 lugares de uma
 fila para os contrabaixistas

$\times$ $\frac{5}{5}!$
 número de maneiras de
 permutar as restantes
 5 músicas, que não os
 contrabaixistas, entre
 si nos 5 lugares restantes

Opção (B)

2.3. Seja (u_n) a sucessão que representa o número de minutos que a Constança praticou no dia n .

Como se sabe que, em cada dia, exceto no primeiro, praticou sempre mais 10 minutos do que no dia anterior, então (u_n) é uma progressão aritmética de razão 10. Sabe-se também que $u_4 = 60$ e $S_m = 2970$. Assim:

$$u_4 = u_1 + 3r$$

$$60 = u_1 + 3 \times 10$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 60 - 30$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 30$$

e:

$$u_n = u_1 + (n - 1) \times r$$

$$u_n = 30 + (n - 1) \times 10$$

$$\Leftrightarrow u_n = 30 + 10n - 10$$

$$\Leftrightarrow u_n = 10n + 20$$

Como $S_m = 2970$, vem que:

$$\frac{u_1 + u_m}{2} \times m = 2970$$

$$\frac{30 + 10m + 20}{2} \times m = 2970$$

$$\Leftrightarrow (25 + 5m) \times m = 2970$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 25m - 2970 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 5m - 594 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times (-594)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow m = 22 \vee m = -27$$

Como $-27 \notin \mathbb{N}$ e $22 \in \mathbb{N}$, tem-se que $m = 22$.

3.

3.1. Como $[ABCDEFGH]$ é um prisma, a reta BC é perpendicular ao plano ABF .

Assim, um vetor diretor da reta BC , por exemplo, o vetor de coordenadas $(2, 3, 6)$ é um vetor normal ao plano ABF .

Logo, uma equação do plano ABF é da forma $2x + 3y + 6z + d = 0$.

Como $A \in ABF$ e A tem coordenadas $(4, -4, -3)$ tem-se que:

$$2 \times 4 + 3 \times (-4) + 6 \times (-3) + d = 0 \Leftrightarrow 8 - 12 - 18 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = 22$$

Assim, uma equação do plano ABF é $2x + 3y + 6z + 22 = 0$.

Opção (A)

3.2. Determinação das coordenadas de B : como B tem a ordenada igual ao dobro da abscissa, as coordenadas de B são da forma $(a, 2a, c)$, $a, c \in \mathbb{R}$.

Como $B \in BC$, vem que:

$$\begin{aligned}(a, 2a, c) = (3, 5, 1) + k(2, 3, 6) &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + 2k \\ 2a = 5 + 3k \\ c = 1 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(3 + 2k) = 5 + 3k \\ \hline \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6 + 4k = 5 + 3k \\ \hline \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - 2 \\ k = -1 \\ c = 1 - 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ k = -1 \\ c = -5 \end{cases}\end{aligned}$$

Coordenadas de B : $(1, 2, -5)$

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (4, -4, -3)$$

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{41}$$

$$\overrightarrow{OB} = B - O = (1, 2, -5)$$

$$\|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos(A\hat{O}B)$$

$$(4, -4, -3) \cdot (1, 2, -5) = \sqrt{41} \times \sqrt{30} \times \cos(A\hat{O}B)$$

$$\Leftrightarrow 4 + (-8) + 15 = \sqrt{1230} \times \cos(A\hat{O}B)$$

$$\Leftrightarrow \cos(A\hat{O}B) = \frac{11}{\sqrt{1230}}$$

Assim, $A\hat{O}B \approx 72^\circ$.

3.3. Na experiência aleatória considerada, seja A o acontecimento: “os 4 vértices não pertencem à mesma face lateral”.

Seja $\overline{A}$ o acontecimento contrário.

Sabemos que:

$$\text{Número de casos possíveis ao acontecimento } \overline{A}: {}^4C_2 \times {}^4C_2 = 36$$

$$\text{Número de casos favoráveis ao acontecimento } \overline{A}: 4$$

ou seja, $P(\overline{A})$, que é a probabilidade de os 4 vértices pertencerem à mesma face lateral do prisma, é $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

$$\text{Assim, } P(A) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

4. $D = \mathbb{R}^+$

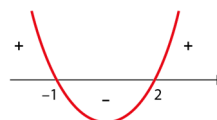
$$\begin{aligned}\ln^2 x - \ln x - 2 < 0 &\Leftrightarrow \ln x > -1 \wedge \ln x < 2 \\ &\Leftrightarrow \ln x > -1 \wedge \ln x < 2 \\ &\Leftrightarrow x > e^{-1} \wedge x < e^2 \\ &\Leftrightarrow e^{-1} < x < e^2\end{aligned}$$

C.S. = $]e^{-1}, e^2[\cap \mathbb{R}^+ =]e^{-1}, e^2[$

Cálculo auxiliar

Mudança de variável: $y = \ln x$

$$\begin{aligned}y^2 - y - 2 = 0 &\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1+3}{2} \vee y = \frac{1-3}{2} \\ &\Leftrightarrow y = 2 \vee y = -1\end{aligned}$$



Assim:

$$y^2 - y - 2 < 0 \Leftrightarrow y > -1 \wedge y < 2$$

5.

5.1. Em $]1, +\infty[$: $g'(x) = (x^2 - 3x - 2\ln x)' =$
 $= 2x - 3 - 2 \times \frac{1}{x}$

$$g'(x) = 0$$

$$\begin{aligned}2x - 3 - \frac{2}{x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x - 2}{x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \quad \wedge \quad \underbrace{x \neq 0}_{\text{condição universal em }]1, +\infty[} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3+5}{4} \vee x = \frac{3-5}{4} \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{1}{2} \notin]1, +\infty[\end{aligned}$$

	1		2	$+\infty$
Sinal de g'		-	0	+
Variação de g			$g(2)$ mín.	

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned}\bullet g'\left(\frac{3}{2}\right) &= 2 \times \frac{3}{2} - 3 - \frac{2}{\frac{3}{2}} = \\ &= 0 - \frac{4}{3} < 0 \\ \bullet g'(5) &= 2 \times 5 - 3 - \frac{2}{5} = \\ &= 7 - \frac{2}{5} > 0\end{aligned}$$

g é decrescente em $]1, 2]$ e crescente em $[2, +\infty[$.

Tem um mínimo relativo $g(2) = 4 - 6 - 2\ln 2 = -2 - 2\ln 2$.

5.2. Como g é contínua em $x = 1$ então $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$.

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1-x}{e^{x-1}-1} - e^{x-k} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{e^{x-1}-1} - \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-k} = \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-y}{e^y-1} - e^{1-k} = \\
 &\quad \text{Mudança de variável} \\
 &\quad y = x-1 \\
 &\quad x \rightarrow 1^- \Rightarrow y \rightarrow 0^- \\
 &= - \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y-1}{y}} - e^{1-k} = \\
 &\quad \text{Limite notável} \\
 &= - \frac{1}{1} - e^{1-k} = \\
 &= -1 - e^{1-k}
 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) = 1^2 - 3 \times 1 - 2 \times \ln 1 = 1 - 3 - 0 = -2$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 -1 - e^{1-k} &= -2 \Leftrightarrow -e^{1-k} = -1 \\
 &\Leftrightarrow e^{1-k} = 1 \\
 &\Leftrightarrow 1 - k = \ln 1 \\
 &\Leftrightarrow k = 1 - 0 \\
 &\Leftrightarrow k = 1
 \end{aligned}$$

6. A percentagem de alunos com classificação inferior a 13 valores é 30% (8, 10 e 12 valores que corresponde a 5% + 15% + 10%).

Em 20 alunos, temos, então, $20 \times 0,3 = 6$ alunos com classificação inferior a 13.

Assim, **I – b).**

Introduzindo os dados na calculadora gráfica, no modo ESTATÍSTICA, podemos obter a mediana, a média e o desvio-padrão desta distribuição.

LISTA 1 → classificações

LISTA 2 → frequência absoluta

$$0,05 \times 20 = 1$$

$$0,15 \times 20 = 3$$

$$0,1 \times 20 = 2$$

$$0,2 \times 20 = 4$$

$$0,25 \times 20 = 5$$

LISTA 1	LISTA 2
8	1
10	3
12	2
13	4
14	5
17	4
20	1

Assim:

Mediana = 13,5 **II – c)** Média = 13,6 **III – b)** Desvio-padrão $\approx 2,9$ **IV – a)**

7. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^4(1 + \cos x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^4(1 + \cos x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^4(1 + \cos x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x^2(1 + \cos x)} \right) = \\
 &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2(1 + \cos x)} = \\
 &= 1 \times 1 \times \frac{1}{0^+(1 + \cos 0)} = \\
 &= \frac{1}{0^+ \times 2} = \\
 &= \frac{1}{0^+} = \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f , e é única, pois f é contínua em todos os pontos do seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

8. A afirmação I é falsa, pois, para que se pudesse afirmar, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, que a função f tem pelo menos um zero no intervalo $]1, 3[$, era necessário que f fosse contínua no intervalo $[1, 3]$, o que **não** se verifica, já que f não é contínua em $x = 2$ ($\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$).

A afirmação II é falsa, pois, para que a reta de equação $x = 2$ seja assíntota vertical ao gráfico da função $\frac{1}{f}$, era necessário que $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ (ou $-\infty$) ou $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ (ou $-\infty$). No entanto, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)} = \frac{1}{f(2)}$, que é um número real, e $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$, que é também um número real.

9. A área do setor circular é dada em função de α por $\frac{\alpha \times r^2}{2}$, onde $r = 2$, logo $\frac{\alpha \times 2^2}{2} = 2\alpha$.

A área do trapézio $[OBCD]$ é dada por $\frac{\overline{BC} + \overline{OD}}{2} \times \overline{CD}$.

Como as coordenadas dos pontos B , C e D são $B(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$, $C(-2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ e $D(-2\cos\alpha, 0)$, tem-se que:

$$\overline{BC} = 2 \times (2 \cos \alpha) = 4 \cos \alpha$$

$$\overline{OD} = 2 \cos \alpha$$

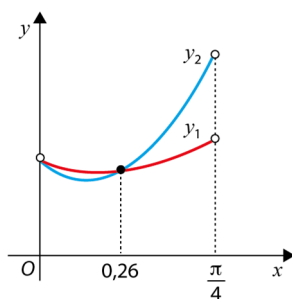
$$\overline{CD} = 2 \sin \alpha$$

$$\begin{aligned}
 A_{[OBCD]} &= \frac{4 \cos \alpha + 2 \cos \alpha}{2} \times 2 \sin \alpha = 6 \cos \alpha \sin \alpha = \\
 &= 3 \times 2 \cos \alpha \sin \alpha = \\
 &= 3 \sin(2\alpha)
 \end{aligned}$$

Assim, a área sombreada pode ser dada, em função de α , por $2\alpha + 3\sin(2\alpha)$.

- 10.** Seja θ_1 o menor dos dois valores referidos, $\theta_1 \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$. Como o outro valor é o dobro, então pretende-se o valor de θ_1 tal que $F(\theta_1) = F(2\theta_1)$.

Usando x como variável independente e colocando na calculadora gráfica as expressões $y_1 = \frac{4095}{5\sin x + 12\cos x}$ e $y_2 = \frac{4095}{5\sin(2x) + 12\cos(2x)}$, obtém-se a seguinte representação gráfica:



Assim, o valor pretendido é, arredondado às centésimas, 0,26 radianos.

- 11.** Seja z o número complexo do qual o ponto A é o seu afixo.

$$z = -2i = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$$

Como z é uma raiz cúbica de w , então $z^3 = w$. Assim:

$$\begin{aligned}
 w &= \left(2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}\right)^3 = 2^3 \times e^{i\left(3 \times \frac{3\pi}{2}\right)} = \\
 &= 8e^{i\frac{9\pi}{2}} = \\
 &= 8e^{i\frac{\pi}{2}}
 \end{aligned}$$

Opção (C)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{12.} \quad z &= \frac{4}{1+i} - \frac{2}{i^7} = \frac{4(1-i)}{(1+i)(1-i)} - \frac{2}{-i} = \frac{4-4i}{1^2-i^2} + \frac{2}{i} = \\
 &= \frac{4-4i}{1+1} + \frac{2 \times i}{i^2} = \\
 &= \frac{4-4i}{2} + (-2i) = \\
 &= 2 - 2i - 2i = \\
 &= 2 - 4i
 \end{aligned}$$

Seja $w = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z \times w &= (2 - 4i)(a + bi) = 2a + 2bi - 4ai - 4bi^2 = \\ &= \underbrace{2a + 4b}_{\text{Re}(z \times w)} + \underbrace{(2b - 4a)i}_{\text{Im}(z \times w)} \end{aligned}$$

Como, por um lado, $z \times w$ tem afixo pertencente à bissetriz do 3.º quadrante, então

$\text{Re}(z \times w) = \text{Im}(z \times w)$, com $\text{Re}(z \times w) < 0$ e $\text{Im}(z \times w) > 0$.

Assim:

$$2a + 4b = 2b - 4a \Leftrightarrow 2b = -6a \Leftrightarrow b = -3a$$

Por outro lado, $|z \times w| = 5\sqrt{2}$, logo $\sqrt{(2a + 4b)^2 + (2b - 4a)^2} = 5\sqrt{2}$.

Assim:

$$\begin{aligned} 4a^2 + 16ab + 16b^2 + 4b^2 - 16ab + 16a^2 &= 25 \times 2 \Leftrightarrow 20a^2 + 20b^2 = 50 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Como $b = -3a$, tem-se:

$$\begin{aligned} a^2 + (-3a)^2 &= \frac{5}{2} \Leftrightarrow a^2 + 9a^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 10a^2 = \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \vee a = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Se $a = \frac{1}{2}$, então $b = -\frac{3}{2}$.

Se $a = -\frac{1}{2}$, então $b = \frac{3}{2}$, mas, neste caso, $\text{Re}(z \times w) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \times \frac{3}{2} = -1 + 6 = 5 > 0$

e $\text{Re}(z \times w)$ tem de ser negativo.

Assim, $w = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

13. Seja x_0 a abscissa do ponto de tangência.

Então, $f'(x_0) = m$ e, como $f'(x) = (2x^2 + bx + 5)' = 4x + b$, tem-se que $4x_0 + b = m$.

Como o ponto de tangência pertence tanto ao gráfico de f como à reta tangente de equação

$y = mx + 1$, vem que $2x_0^2 + bx_0 + 5 = mx_0 + 1$.

Como $m = 4x_0 + b$, tem-se que:

$$\begin{aligned} 2x_0^2 + bx_0 + 5 &= (4x_0 + b)x_0 + 1 \Leftrightarrow 2x_0^2 + bx_0 + 5 = 4x_0^2 + bx_0 + 1 \\ &\Leftrightarrow -2x_0^2 = -4 \\ &\Leftrightarrow x_0^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Como a abscissa do ponto pretendido é positiva, então $x_0 = \sqrt{2}$.