

Proposta de resolução do Exame Final Nacional de Matemática A – 2022 (2ª fase)

1. Apenas na opção (C) existe uma vizinhança de 0 tal que, para todo o x pertencente a essa vizinhança de 0 e pertencente ao domínio da função, $f(0)$ é inferior ou igual a $f(x)$.

Opção (C)

2. $2^n = 16\,384 \Leftrightarrow n = \log_2(16\,384) \Leftrightarrow n = 14$

O valor do quarto elemento da linha seguinte é ${}^{15}C_3 = 455$.

Opção (B)

3. Consideremos os acontecimentos:

A: "O passageiro já tinha viajado de avião."

B: "O passageiro já tinha estado em Faro."

Sabemos que:

$$\bullet P(\bar{A}) = 0,7$$

$$\bullet P(B) = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\bullet P(A | B) = \frac{1}{2}$$

Assim:

$$P(A | B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2$$

Pretendemos determinar $P(\bar{A} | \bar{B})$:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} | \bar{B}) &= \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\bar{B})} = \\ &= \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{P(\bar{B})} = \\ &= \frac{1 - 0,3 - 0,4 + 0,2}{0,6} = \\ &= \frac{0,5}{0,6} = \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

4. **1º Processo**

O número de casos possíveis é igual a $12!$.

O número de casos favoráveis é igual a $10! \times 3!$.

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{10! \times 3!}{12!} = \frac{1}{22}$.

2º Processo

O número de casos possíveis é igual a ${}^{12}C_3 \times {}^9C_2 \times {}^7C_3 \times {}^4C_4$.

O número de casos favoráveis é igual a $10 \times {}^9C_2 \times {}^7C_3 \times {}^4C_4$.

$$\left(\frac{A}{\quad} \frac{A}{\quad} \frac{A}{\quad} \text{ — — — — — — — — — } \right) \times 10$$

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{10 \times {}^9C_2 \times {}^7C_3 \times {}^4C_4}{{}^{12}C_3 \times {}^9C_2 \times {}^7C_3 \times {}^4C_4} = \frac{1}{22}$.

5.

5.1 1º Processo

Como os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{HE}$ são perpendiculares, então $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HE} = 0$.

2º Processo

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, 2) - (-2, 5, 0) = (3, -6, 2)$$

$$\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{BC} = C - B = (3, 2, 8) - (1, -1, 2) = (2, 3, 6)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HE} = 6 - 18 + 12 = 0$$

Opção (B)

5.2 1º Processo

O vetor $\overrightarrow{AB}$ é um vetor normal ao plano ADE :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, 2) - (-2, 5, 0) = (3, -6, 2)$$

Determinemos uma equação cartesiana do plano ADE :

$$3x - 6y + 2z + d = 0$$

Como $A(-2, 5, 0)$ pertence ao plano, vem que:

$$3 \times (-2) - 6 \times 5 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow -6 - 30 + d = 0 \Leftrightarrow d = 36$$

$$ADE: 3x - 6y + 2z + 36 = 0$$

Como o vértice E pertence à reta definida por $(x, y, z) = (0, 0, 3) + k(1, -1, -1)$, $k \in \mathbb{R}$, as coordenadas do vértice E são do tipo $(k, -k, 3 - k)$ com $k \in \mathbb{R}$.

Como o ponto E pertence ao plano ADE , então:

$$3 \times k - 6 \times (-k) + 2 \times (3 - k) + 36 = 0 \Leftrightarrow 3k + 6k + 6 - 2k + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7k = -42$$

$$\Leftrightarrow k = -6$$

$$k = -6 \quad \curvearrowright \quad E(-6, 6, 3 + 6)$$

$$E(-6, 6, 9)$$

2º Processo

O vértice E pertence à reta definida por $(x, y, z) = (0, 0, 3) + k(1, -1, -1)$, $k \in \mathbb{R}$.

Logo, $E(k, -k, 3 - k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (3, 2, 8) - (1, -1, 2) = (2, 3, 6)$$

$$\overrightarrow{D} = A + \overrightarrow{BC} = (-2, 5, 0) + (2, 3, 6) = (0, 8, 6)$$

O vetor $\overrightarrow{DE}$ é perpendicular, por exemplo, a $\overrightarrow{BC}$, logo $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$.

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \Leftrightarrow (2, 3, 6) \cdot (k, -k-8, -3-k) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2k - 3k - 24 - 18 - 6k = 0$$

$$\Leftrightarrow -7k = 42$$

$$\Leftrightarrow k = -6$$

$$k = -6 \rightarrow E(-6, 6, 9)$$

6. Seja $z = x + yi$.

$$z \times \bar{z} = 4 \Leftrightarrow (x + yi)(x - yi) = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 i^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

A condição $z \times \bar{z} = 4$ define a circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio 2.

Opção (A)

$$\begin{aligned} 7. \quad z &= \frac{4}{1-i} + 4i^{18} = \frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)} + 4i^{4 \times 4 + 2} = \frac{4+4i}{1-i^2} + 4i^2 = \\ &= \frac{4+4i}{2} - 4 = \\ &= 2 + 2i - 4 = \\ &= -2 + 2i \end{aligned}$$

$$|-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2}{-2} \wedge \theta \in 2^\circ \text{Q} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = -1 \wedge \theta \in 2^\circ \text{Q}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}, \text{ por exemplo.}$$

$$z = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_1 = 2\sqrt{2} e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{17\pi}{12}} \quad (\times 3) \quad (\times 4)$$

$$z_2 = 2\sqrt{2} e^{i\left(\frac{17\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{25\pi}{12}} \quad (\times 4)$$

As restantes raízes cúbicas de w são $2\sqrt{2} e^{i\frac{17\pi}{12}}$ e $2\sqrt{2} e^{i\frac{25\pi}{12}}$.

8. f é contínua em $x = 0$ quando $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 \times \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\sqrt{e+x}) = \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, logo f não é contínua em $x = 0$.

9.

9.1 Em $]0, \pi[$: $g'(x) = x + 2 \cos^2 x$

$$g''(x) = 1 + 2 \times 2 \cos x \times (-\sin x) \\ = 1 - 2 \sin(2x)$$

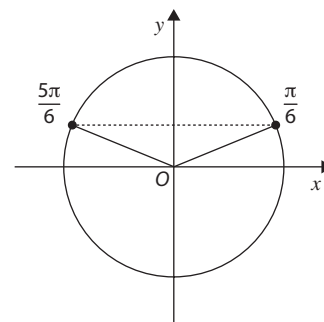
$$g''(x) = 0$$

$$1 - 2 \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Em $]0, \pi[$: $x = \frac{\pi}{12}$ e $x = \frac{5\pi}{12}$.



x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π
Sinal de g''		+	0	-	0	+	
Sentido das concavidades do gráfico de g		$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	

Cálculos auxiliares

• Em $]0, \frac{\pi}{12}[$

$$0 < x < \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow 0 < 2x < \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 0 < \sin(2x) < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -1 < -2 \sin(2x) < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 - 2 \sin(2x) < 1$$

$$\bullet g''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2 = -1 (< 0)$$

$$\bullet g''\left(\frac{6\pi}{12}\right) = g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2 \sin(\pi) = 1 (> 0)$$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]0, \frac{\pi}{12}[$ e em $[\frac{5\pi}{12}, \pi[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$.

O gráfico de g tem dois pontos de inflexão de abscissas $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{5\pi}{12}$.

9.2 O declive da reta tangente é igual a -2 .

$$g'(x) = -2 \wedge x \in]-\infty, 0[$$

$$\Leftrightarrow 3e^{2x} - 7e^x = -2 \wedge x < 0$$

$$\Leftrightarrow 3(e^x)^2 - 7e^x + 2 = 0 \wedge x < 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 3 \times 2}}{6} \wedge x < 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{7 \pm 5}{6} \wedge x < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(e^x = 2 \vee e^x = \frac{1}{3} \right) \wedge x < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \ln(2) \vee x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \right) \wedge x < 0$$

Como $\ln(2) > 0$ e $x < 0$, então $x = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$.

$$\text{C.S.} = \left\{ \ln\left(\frac{1}{3}\right) \right\}$$

10. $D_h = \mathbb{R}^+$

Como h é contínua em $\mathbb{R}^+$, a reta de equação $x = 0$ é a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1} = \frac{1 + (-\infty)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é (a única) assíntota vertical ao gráfico de h .

Como o domínio é limitado inferiormente, só faz sentido procurar assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x} \left(1 + \frac{\ln x}{e^x} \right)}{\cancel{e^x} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\ln x}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}} =$$

$$= \frac{1 + \frac{0}{+\infty}}{1 - \frac{1}{+\infty}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

A reta de equação $y = 1$ é (a única) assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \rightarrow +\infty$.

11.

$$11.1 \quad m(1) = \frac{30(1 + 0,006)^3 - 29}{(1 + 0,006)^2}$$

$$m(0) = \frac{30 - 29}{1} = 1$$

$$\frac{m(1) - m(0)}{m(0)} \approx 0,52; 52\%$$

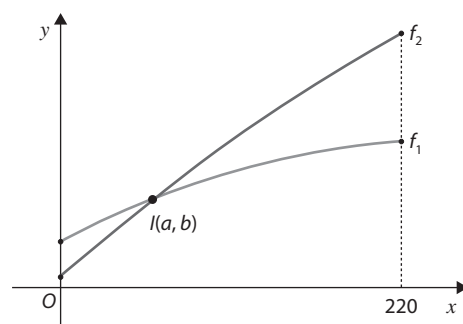
Opção (B)

$$11.2 \quad m(t + 30) = 3 m(t), t \in [0, 220]$$

Usando x como variável independente:

$$f_1(x) = \frac{30(1 + 0,006(x + 30))^3 - 29}{(1 + 0,006(x + 30))^2}$$

$$f_2(x) = 3 \times \frac{30(1 + 0,006x)^3 - 29}{(1 + 0,006x)^2}$$



$l(a, b)$

$$a \approx 10,35$$

$$b \approx 18,47$$

$$\begin{aligned} 10,35 \text{ min} &= 10 \text{ min} + 0,35 \text{ min} \\ &= 10 \text{ min} + 21 \text{ segundos} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$1 \text{ min} \text{ ————— } 60 \text{ s}$$

$$0,35 \text{ min} \text{ ————— } x \text{ s}$$

$$x = 0,35 \times 60 = 21 \text{ segundos}$$

12. 1º Processo

• Para $n \in \mathbb{N}$ e $n \leq 3$, $u_n = (-1)^n$

Para $n \in \mathbb{N}$ e $n \leq 3$, $-1 \leq u_n \leq 1$

• Para $n \in \mathbb{N}$ e $n > 3$, $u_n = \frac{4n - 1}{n + 3} = 4 - \frac{13}{n + 3}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} 4n - 1 \quad | \quad n + 3 \\ -4n - 12 \quad | \quad 4 \\ \hline -13 \end{array}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ e $n > 3$, tem-se que:

→ por um lado:

$$n + 3 > 6 \Leftrightarrow \frac{13}{n + 3} < \frac{13}{6}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{13}{n + 3} > -\frac{13}{6}$$

$$\Leftrightarrow 4 - \frac{13}{n + 3} > \frac{11}{6}$$

→ por outro lado:

$$\frac{13}{n + 3} > 0 \Leftrightarrow -\frac{13}{n + 3} < 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - \frac{13}{n + 3} < 4$$

$$\text{Para } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 3: \frac{11}{6} < u_n < 4$$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq u_n < 4$, ou seja, (u_n) é limitada.

2º Processo

Sabemos que toda a sucessão convergente é limitada.

$$\lim u_n = \lim \frac{4n-1}{n+3} = \lim \frac{\cancel{n}\left(4-\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \lim \frac{4-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = \frac{4}{1} = 4$$

Como o valor obtido é um número real, então (u_n) é convergente. Logo (u_n) é limitada.

13. $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + a^2x + \sqrt{2} \quad D_f = \mathbb{R}$$

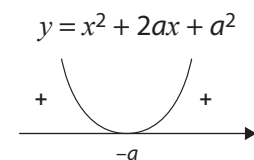
$$f'(x) = x^2 + 2ax + a^2 \quad D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2ax + a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4 \times a^2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -a$$

x	$-\infty$	$-a$	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	+
Variação de f	$\nearrow$	$f(-a)$	$\nearrow$



f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e f não admite extremos para qualquer valor de a .

14. $A_{[AOB]} = \frac{\overline{OA} \times \text{ordenada de } B}{2}$

$$r: y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1$$

• Determinemos as coordenadas de A:

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

$$A\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$$

$$s: y = mx$$

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ logo:}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 4 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{3}$$

Como $\alpha \in 1^\circ \text{Q}$, então $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$.

$$s: y = \sqrt{3}x$$

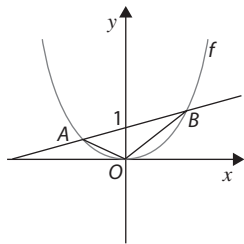
• Determinemos as coordenadas de B:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 = \sqrt{3}x \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right)x = -1 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}x = -1 \\ \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = 1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$$

$$A_{[AOB]} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ u.a.}$$

15. 1º Processo



$$r: y = mx + 1$$

$$A(a, am + 1)$$

$$A(a, a^2)$$

$$B(b, bm + 1)$$

$$B(b, b^2)$$

$$a^2 = am + 1 \Leftrightarrow \frac{a^2 - 1}{a} = m$$

$$b^2 = bm + 1 \Leftrightarrow \frac{b^2 - 1}{b} = m$$

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - 1}{a} = \frac{b^2 - 1}{b} &\Leftrightarrow a^2 b - b = ab^2 - a \\ &\Leftrightarrow a^2 b - ab^2 + a - b = 0 \\ &\Leftrightarrow ab(a - b) + (a - b) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - b)(ab + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b \vee ab = -1 \end{aligned}$$

Como $a \neq b$, pois r passa pelo ponto de coordenadas $(0, 1)$ e é não vertical, então $ab = -1$.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (a, a^2) \cdot (b, b^2) = ab + a^2 b^2 = ab + (ab)^2 = -1 + (-1)^2 = 0$$

Logo, o ângulo convexo AOB é reto.

2º Processo

$$A(a, a^2)$$

$$B(b, b^2)$$

$$m_{AB} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b - a)(b + a)}{b - a} = b + a$$

$$r: y = (b + a)x + 1$$

Como $A(a, a^2)$ pertence à reta r :

$$a^2 = (b + a)a + 1 \Leftrightarrow a^2 = ab + a^2 + 1 \Leftrightarrow ab = -1$$

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (a, a^2)$$

$$\overrightarrow{OB} = B - O = (b, b^2)$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (a, a^2) \cdot (b, b^2) = ab + a^2 b^2 = ab + (ab)^2 = -1 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$$

Logo, o ângulo convexo AOB é reto.