

1. Sabemos que $P(1, -1, 2)$, $Q(-2, 1, 1)$ e $R(-5, 5, -3)$.

$$\begin{aligned} 1.1. \quad r = d(R, Q) &= \sqrt{(-5 + 2)^2 + (5 - 1)^2 + (-3 - 1)^2} = \\ &= \sqrt{9 + 16 + 16} = \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

Assim, uma condição que define a superfície esférica de centro no ponto R e que passa no ponto Q é:

$$(x + 5)^2 + (y - 5)^2 + (z + 3)^2 = 41$$

Opção (C)

1.2. $\overrightarrow{RS}$ é um vetor normal ao plano pedido.

$\overrightarrow{RS}$ é colinear com $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2, 1, 1) - (1, -1, 2) = (-3, 2, -1)$$

$\overrightarrow{PQ}$ é também um vetor normal ao plano pedido.

Logo, uma equação do plano é do tipo:

$$-3x + 2y - z + d = 0$$

Como o plano passa pelo ponto P , vem que:

$$\begin{aligned} -3 \times 1 + 2 \times (-1) - 2 + d &= 0 \Leftrightarrow -3 - 2 - 2 + d = 0 \\ \Leftrightarrow d &= 7 \end{aligned}$$

Assim, $-3x + 2y - z + 7 = 0$ é uma equação do plano pedido.

2. Sabe-se que $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5}$ e que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow -\cos(\alpha) = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{5}$$

Pretendemos determinar o valor de $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) + 2 \cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$.

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) + 2 \cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha - 2 \sin \alpha =$$

Cálculos auxiliares

• $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, logo:

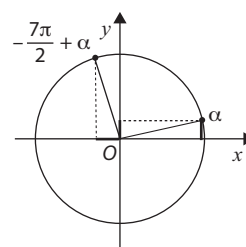
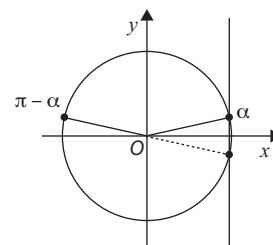
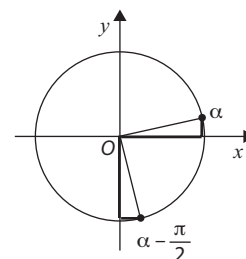
$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \frac{1}{25} &= 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{24}{25} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{24}}{5} \\ &\Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{2\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

• $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, logo:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2\sqrt{6}}{1} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -2\sqrt{6} - 2 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = \\ &= -2\sqrt{6} - \frac{4\sqrt{6}}{5} = \\ &= -\frac{14\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$



3.
3.1. 12 raquetes $\begin{cases} 6 \text{ de badminton} \\ 6 \text{ de ténis} \end{cases}$

Número de casos possíveis: ${}^{12}C_6 \times {}^6C_6$

Número de casos favoráveis: ${}^6C_3 \times {}^6C_3 \times {}^3C_3 \times {}^3C_3$

Logo, a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{{}^6C_3 \times {}^6C_3 \times {}^3C_3 \times {}^3C_3}{{}^{12}C_6 \times {}^6C_6} = \frac{100}{231} \approx 0,43$$

Opção (B)

- 3.2. Consideremos os seguintes acontecimentos:

B : "praticar badminton"

M : "ser do sexo masculino"

Sabemos que:

$$\bullet P(\overline{M}) = 0,65 = \frac{13}{20}$$

$$\bullet P(B | M) = \frac{1}{7}$$

$$\bullet P(\overline{M} | B) = \frac{5}{6}$$

Então:

$$\bullet P(M) = 0,35 = \frac{7}{20}$$

$$\begin{aligned} \bullet P(B | M) = \frac{1}{7} &\Leftrightarrow \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{1}{7} \\ &\Leftrightarrow P(B \cap M) = \frac{1}{7} \times \frac{7}{20} \\ &\Leftrightarrow P(B \cap M) = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet P(\overline{M} | B) = \frac{5}{6} &\Leftrightarrow \frac{P(\overline{M} \cap B)}{P(B)} = \frac{5}{6} \\ &\Leftrightarrow P(\overline{M} \cap B) = \frac{5}{6} \times P(B) \\ &\Leftrightarrow P(B) - P(B \cap M) = \frac{5}{6} P(B) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6} P(B) = \frac{1}{20} \\ &\Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Organizando os dados numa tabela, vem que:

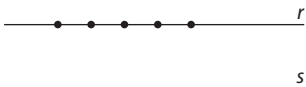
	M	$\bar{M}$	Total
B	$\frac{1}{20}$		$\frac{3}{10}$
$\bar{B}$			$\frac{7}{10}$
Total	$\frac{7}{20}$	$\frac{13}{20}$	1

Pretendemos determinar $P(\bar{M} \cap \bar{B})$.

$$P(\bar{M} \cap B) = \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = \frac{5}{20}$$

(x2)

$$P(\bar{M} \cap \bar{B}) = \frac{13}{20} - \frac{5}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}, \text{ ou seja, } 40\%.$$

4. 

$${}^5C_2 \times n + {}^nC_2 \times 5 = 175 \Leftrightarrow 10n + \frac{n(n-1)}{2} \times 5 = 175$$

$$\Leftrightarrow 20n + (n^2 - n) \times 5 = 350$$

$$\Leftrightarrow 5n^2 + 15n - 350 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 70 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-70)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm 17}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -10 \vee n = 7$$

Como $n \geq 2$, então $n = 7$.

5. $\lim v_n = \lim \left(2 - \frac{5}{n+3} \right) = 2^-$

$$\lim g(v_n) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$$

Opção (B)

6. (u_n) é uma progressão aritmética.

$$\begin{cases} u_6 + u_{20} = -5 \\ u_{19} = 4 u_7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5r + u_1 + 19r = -5 \\ u_1 + 18r = 4(u_1 + 6r) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ -3u_1 - 6r = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ -3u_1 = 6r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ u_1 = -2r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2r) + 24r = -5 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4r + 24r = -5 \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20r = -5 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{4} \\ u_1 = -2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{4} \\ u_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S_{16} &= \frac{u_1 + u_{16}}{2} \times 16 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 15 \times \left(-\frac{1}{4}\right)}{2} \times 16 = \\ &= \left(1 - \frac{15}{4}\right) \times 8 = \\ &= -\frac{11}{4} \times 8 = \\ &= -22 \end{aligned}$$

7. $z = 2 e^{i\frac{3\pi}{5}}$

$$z \times w = i \Leftrightarrow 2 e^{i\frac{3\pi}{5}} \times w = i$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2 e^{i\frac{3\pi}{5}}}$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{1}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5}\right)}$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{1}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{10}\right)}$$

$$-\frac{\pi}{10} + 2\pi = \frac{19\pi}{10}$$

Opção (A)

8. Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1º Processo

$$(1 + 2i)z + (1 - 2i)\bar{z} + 10 = 0$$

Seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(1 + 2i)(x + yi) + (1 - 2i)(x - yi) + 10 = 0 \Leftrightarrow x + yi + 2xi - 2y + x - yi - 2xi - 2y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4y = -2x - 10$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Logo, $z = x + \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)i$.

Assim:

$$|z| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}}$$

Pretendemos determinar o valor de x para o qual o valor de $\sqrt{\frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}}$ é mínimo.

Seja f a função definida por $f(x) = \sqrt{\frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}}} = \frac{5x + 5}{4\sqrt{\frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x + 5 = 0 \wedge 4\sqrt{\frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \wedge \frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} \neq 0$$

(x2)

$$\Leftrightarrow x = -1 \wedge 5x^2 + 10x + 25 \neq 0$$

condição universal em $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Sinal de f'	-	0	+
Variação de f	$\searrow$	mín.	$\nearrow$

O sinal de f' depende apenas do sinal de $x \mapsto 5x + 5$.

$$x = -1 \rightarrow y = \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{5}{2} = 2$$

O número complexo com menor módulo é $-1 + 2i$.

2º Processo

$$(1 + 2i)z + (1 - 2i)\bar{z} + 10 = 0$$

Seja $z = x + yi$ com $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(1 + 2i)(x + yi) + (1 - 2i)(x - yi) + 10 = 0 \Leftrightarrow x + yi + 2xi - 2y + x - yi - 2xi - 2y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4y = -2x - 10$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Pretendemos determinar o ponto da reta definida por $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ mais próximo da origem.

Seja s a reta perpendicular à reta definida por $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ que passa por O (origem do referencial).

$$s: y = -2x$$

Determinemos a interseção destas duas retas:

$$\begin{cases} y = -2x \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$P(-1, 2)$ é o ponto da reta mais próximo da origem, logo $-1 + 2i$ é o número complexo cujo afixo pertence à referida reta com menor módulo.

9.

9.1. $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} - 3 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} - 3 = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} - 3 = \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$5x^2 + 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 5 \times 25}}{10}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{-400}}{10}$$

equação impossível em $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 3 = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} - 3 = \\
&= \frac{1}{1} - 3 = \\
&= 1 - 3 = \\
&= -2
\end{aligned}$$

A reta de equação $y = -2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

$x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) = \\
&= 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} =
\end{aligned}$$

Consideremos a mudança de variável $y = -x$. Se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
&= 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{-y} = \\
&= 1 + \lim_{\underbrace{y \rightarrow +\infty}_\text{limite notável}} \frac{e^y}{y} = \\
&= 1 + (+\infty) = \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Como o valor obtido não é um número real, concluímos que o gráfico de f não admite assíntota horizontal quando $x \rightarrow -\infty$.

9.2. Para $x < 0$, $f(x) = \frac{x - e^{-x}}{x}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x - e^{-x})'x - (x - e^{-x}) \times x'}{x^2} = \\
&= \frac{(1 + e^{-x})x - x + e^{-x}}{x^2} = \\
&= \frac{\cancel{x} + xe^{-x} - \cancel{x} + e^{-x}}{x^2} = \\
&= \frac{e^{-x}(x + 1)}{x^2}
\end{aligned}$$

$$f'(-2) = \frac{e^2 \times (-1)}{4} = -\frac{e^2}{4}$$

$$y = -\frac{e^2}{4}x + b$$

Como o ponto de coordenadas $\left(-2, \frac{-2 - e^2}{-2}\right) = \left(-2, 1 + \frac{e^2}{2}\right)$ pertence à reta, vem que:

$$1 + \frac{e^2}{2} = -\frac{e^2}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow 1 + \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{2} + b \Leftrightarrow b = 1$$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f em $x = -2$ é $y = -\frac{e^2}{4}x + 1$.

10. $h(x) = \sin x + \cos^2 x$

$$D_h = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \cos x + 2 \times \cos x \times (-\sin x) = \\ &= \cos x - 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

$$D_{h'} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$h'(x) = 0$$

$$\cos x - 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - 2 \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Em } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[: x = \frac{\pi}{6}$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinal de h'	+	+	0	-	n.d.
Variação de h	$h(0)$ mín.		$h\left(\frac{\pi}{6}\right)$ Máx.		n.d.

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \bullet h'(0) &= 1 - 0 = \\ &= 1 (> 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet h'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} - \cancel{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} (< 0) \end{aligned}$$

$$h(0) = 0 + 1 = 1$$

1 é mínimo relativo em $x = 0$.

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{4} \text{ é máximo relativo em } x = \frac{\pi}{6}.$$

h é estritamente crescente em $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ e é estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

11.

11.1. $T(t_1) = 30 \Leftrightarrow 20 + 100 e^{-kt_1} = 30$

$$\Leftrightarrow 100 e^{-kt_1} = 10$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt_1} = 0,1$$

$$\Leftrightarrow -kt_1 = \ln(0,1)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\ln(0,1)}{-t_1}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\ln(10)}{t_1}$$

Opção (C)

11.2. $T(t) = 20 + 100 e^{-0,04t}$

$$T(0) = 20 + 100 e^0 = 120$$

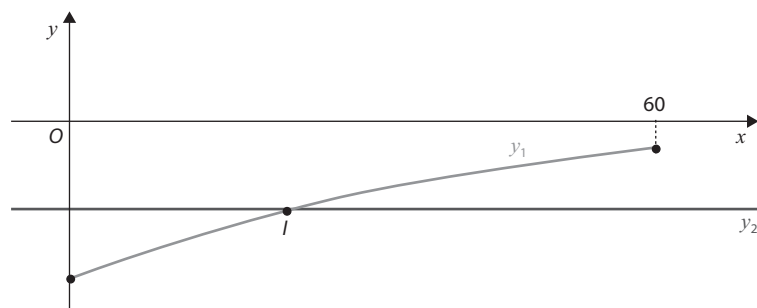
$$\text{t.m.v.}_{[0, t_2]} = \frac{20 + 100 e^{-0,04t_2} - 120}{t_2} = \frac{100 e^{-0,04t_2} - 100}{t_2}$$

$$\frac{100 e^{-0,04t_2} - 100}{t_2} = -2,4$$

Pretende-se resolver a equação $\frac{100 e^{-0,04x} - 100}{x} = -2,4$, $0 \leq x \leq 60$.

$$y_1 = \frac{100 e^{-0,04x} - 100}{x}$$

$$y_2 = -2,4$$



$I(a; -2,4)$

$$a \approx 28,157$$

$$28,157 \text{ minutos} = 28 \text{ minutos} + 0,157 \text{ minutos}$$

$$0,157 \times 60 \approx 9 \text{ segundos}$$

t_2 é igual a 28 minutos e 9 segundos (aproximadamente).

12. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ existe se e somente se $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x}(x^2 - 1)}{\cancel{x}(x - 1)} + k = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} + k = \\ &= 1 + k \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + x \ln x) = 2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) =$$

Consideremos a mudança de variável $x = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y$. Se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} &= 2 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \ln \left(\frac{1}{y} \right) \right) = \\ &= 2 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y^{-1})}{y} = \\ &= 2 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = \\ &= 2 - 0 = \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$1 + k = 2 \Leftrightarrow k = 1$$

$$\begin{aligned}
 13. \quad D &= \{x \in \mathbb{R}: 1 - x > 0 \wedge 3 - 2x > 0\} = \\
 &= \left\{x \in \mathbb{R}: x < 1 \wedge x < \frac{3}{2}\right\} = \\
 &=]-\infty, 1[
 \end{aligned}$$

Em $] -\infty, 1[$:

$$x \ln(1-x) - \ln(1-x) = (1-x) \ln(3-2x) \Leftrightarrow (x-1) \ln(1-x) = (1-x) \ln(3-2x)$$

$$\Leftrightarrow_{x \neq 1} \ln(1-x) = \frac{1-x}{x-1} \times \ln(3-2x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x) = -\ln(3-2x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x) + \ln(3-2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln[(1-x)(3-2x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)(3-2x) = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2x - 3x + 2x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = 2}_{\notin]-\infty, 1[} \vee x = \frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

14. Seja α a amplitude do ângulo AOB .

$$B(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$A_{[OAB]} = k \Leftrightarrow \frac{1 \times \sin \alpha}{2} = k \Leftrightarrow \sin \alpha = 2k$$

$$C(\cos(3\alpha), \sin(3\alpha))$$

$$\sin(3\alpha) = \sin(\alpha + 2\alpha) =$$

$$= \sin \alpha \cos(2\alpha) + \sin(2\alpha) \cos \alpha =$$

$$= \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha \times \cos \alpha =$$

$$= \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha =$$

$$= 3 \times 2k \times (1 - 4k^2) - (2k)^3 =$$

$$= 6k(1 - 4k^2) - 8k^3 =$$

$$= 6k - 24k^3 - 8k^3 =$$

$$= 6k - 32k^3 \quad \text{c.q.d.}$$

Cálculo auxiliar

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$4k^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 4k^2$$