

1.

1.1. A reta AE é perpendicular ao plano EFG . Assim, um vetor diretor da reta AE é um vetor normal ao plano EFG .

Uma equação cartesiana do plano é do tipo $3x - 6y + 2z + d = 0$.

Uma vez que o ponto G , de coordenadas $(5, 3, 6)$, pertence ao plano EFG , vem que:

$$3 \times 5 - 6 \times 3 + 2 \times 6 + d = 0, \text{ ou seja, } 15 - 18 + 12 + d = 0 \Leftrightarrow d = -9.$$

Logo, uma equação do plano EFG é $3x - 6y + 2z - 9 = 0$.

1.2. A superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo tem como centro o ponto médio do segmento de reta $[AG]$ e o valor do raio é igual a $\frac{\overline{AG}}{2}$.

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AG]$. Assim, $M\left(\frac{7+5}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{4+6}{2}\right)$, isto é, $M(6, 2, 5)$.

$$\begin{aligned} r = \frac{\overline{AG}}{2} &= \frac{\sqrt{(5-7)^2 + (3-1)^2 + (6-4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+4+4}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Logo, a equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo é:

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 3$$

2. O número de casos possíveis é igual a 8C_3 .

Cada face do cubo é constituída por 4 vértices, logo, para cada face, existem 4C_3 modos distintos de escolher o plano que contém essa face. Como o cubo tem 6 faces, então o número de casos favoráveis é igual a $6 \times {}^4C_3$.

Logo, a probabilidade pedida é dada por $\frac{6 \times {}^4C_3}{{}^8C_3}$, ou seja, $\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$.

Opção (B)

3. Sabe-se que:

- $P(A) = 0,3$
- $P(B) = 0,4$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,9$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,9 &\Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = 0,9 \\ &\Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = 0,9 \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - 0,9 \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,1 \end{aligned}$$

Pretendemos determinar o valor de $P(A | (A \cup B))$:

$$\begin{aligned} P(A | (A \cup B)) &= \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} \text{ (pois, como } A \subset A \cup B, \text{ então } A \cap (A \cup B) = A.) \\ &= \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} = \\ &= \frac{0,3}{0,3 + 0,4 - 0,1} = \\ &= \frac{0,3}{0,6} = \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. Pretendemos contabilizar os números superiores a 9999 e inferiores a 22 000 que se podem escrever apenas com os números 0, 1, 2 e 3, logo existem dois casos mutuamente exclusivos:

$$\frac{1}{\quad} \frac{\quad}{\quad} \frac{\quad}{\quad} \frac{\quad}{\quad} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{\quad} \frac{\quad}{\quad} \frac{\quad}{\quad} \frac{\quad}{\quad}$$

Começemos pelo caso em que o primeiro algarismo é o número 1:

$$\frac{1}{\frac{\quad}{4} \times \frac{\quad}{4} \times \frac{\quad}{4} \times \frac{\quad}{4}}$$

Como só podemos utilizar os algarismos 0, 1, 2 e 3, existem 4^4 números nas condições pretendidas.

Vejam agora o caso em que o primeiro algarismo é o número 2:

$$\frac{2}{\frac{\quad}{2} \times \frac{\quad}{4} \times \frac{\quad}{4} \times \frac{\quad}{4}}$$

O algarismo que ocupa a unidade de milhar só pode ser o 0 ou o 1; caso contrário, o número seria superior ou igual a 22 000. Assim, existem 2×4^3 números nas condições pretendidas.

Logo, existem $4^4 + 2 \times 4^3 = 384$ números superiores a 9999 e inferiores a 22 000 escritos apenas com os algarismos 0, 1, 2 e 3.

Opção (C)

5. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. Sabe-se que $\log_8 a + \log_8 b = \frac{1}{3}$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \log_8 a + \log_8 b = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \log_8(a \times b) = \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow a \times b = 8^{\frac{1}{3}} \\ &\Leftrightarrow a \times b = \sqrt[3]{8} \\ &\Leftrightarrow a \times b = 2 \end{aligned}$$

Opção (A)

6. Sabe-se que $u_7 = 2 \times u_2$ e $S_{12} = 57$.

Uma vez que (u_n) é uma progressão aritmética, vem que:

$$u_2 = u_1 + r \quad \text{e} \quad u_7 = u_1 + 6r$$

Logo:

$$\begin{aligned} u_1 + 6r = 2 \times (u_1 + r) &\Leftrightarrow u_1 + 6r = 2u_1 + 2r \\ &\Leftrightarrow 4r = u_1 \end{aligned}$$

Além disso:

$$\begin{aligned} S_{12} = 57 &\Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = 57 \\ &\Leftrightarrow \frac{u_1 + u_1 + 11r}{2} \times 12 = 57 \\ &\Leftrightarrow \frac{4r + 4r + 11r}{2} \times 12 = 57 \\ &\Leftrightarrow 19r \times 6 = 57 \\ &\Leftrightarrow 114r = 57 \\ &\Leftrightarrow r = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Tem-se, então, que $u_1 = 4 \times \frac{1}{2} = 2$.

O termo geral de (u_n) pode ser dado por:

$$u_n = 2 + (n - 1) \times \frac{1}{2}$$

isto é:

$$u_n = 2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$$

Como 500 é termo da sucessão, vem que:

$$500 = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1000 = n + 3 \Leftrightarrow n = 997$$

Logo, 500 é o termo de ordem 997.

7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

A sucessão (v_n) tem limite igual a 1, logo as opções (A) e (B) são falsas.

$$v_8 = 8, v_9 = 9 \text{ e } v_{10} = 1,1$$

$v_8 < v_9$ e $v_9 > v_{10}$, logo (v_n) não é monótona, portanto, a opção (D) é falsa.

Como toda a sucessão convergente é limitada, concluímos que a opção (C) é verdadeira.

Opção (C)

8.

8.1.
$$z_1 = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5} = \frac{2(1+i)}{1^2-i^2} + \frac{4}{i} = \frac{2+2i}{2} + \frac{4i}{i^2} =$$

$$= 1 + i - 4i =$$

$$= 1 - 3i$$

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$z_2 = \sqrt{5} e^{i\theta}$$

Como o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas positivas e iguais, então um argumento de $z_1 \times z_2$ é $\frac{\pi}{4}$. Assim, tem-se que:

$$z_1 \times z_2 = |z_1| \times |z_2| e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_1 \times z_2 = \sqrt{10} \times \sqrt{5} e^{i\frac{\pi}{4}}, \text{ ou seja, } z_1 \times z_2 = 5\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \text{ logo:}$$

$$z_2 = \frac{5\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{1-3i} = \frac{5\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}{1-3i} = \frac{5\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)}{1-3i} =$$

$$= \frac{5+5i}{1-3i} = \frac{(5+5i)(1+3i)}{1^2-(3i)^2} = \frac{5+15i+5i-15}{1+9} = \frac{-10+20i}{10} = -1+2i$$

8.2. Como $k+i$ é uma das raízes quadradas do número complexo $3-4i$, sabemos que:

$$(k+i)^2 = 3-4i \Leftrightarrow k^2 + 2ki + i^2 = 3-4i \Leftrightarrow (k^2-1) + 2ki = 3-4i$$

$$\Leftrightarrow k^2-1 = 3 \wedge 2k = -4$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 4 \wedge k = -2$$

$$\Leftrightarrow (k=2 \vee k=-2) \wedge k=-2$$

$$\Leftrightarrow k = -2$$

Opção (D)

9.

9.1. Sabe-se que $r = \frac{3}{5} R$.

Logo, a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite é igual a:

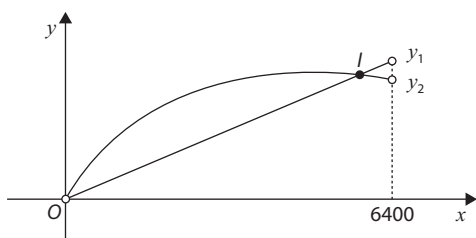
$$\begin{aligned} 50 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{3}{5} R}{R} \right)^2} \right) &= 50 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{9}{25}} \right) = \\ &= 50 \left(1 - \sqrt{\frac{16}{25}} \right) = \\ &= 50 \left(1 - \frac{4}{5} \right) = \\ &= 10, \text{ isto é, } 10\% \end{aligned}$$

Opção (C)

9.2. Sabe-se que $R = 6400$ km e $h = r$.

Então, utilizando a igualdade $r = \frac{R}{h+R} \sqrt{h^2 + 2hR}$, obtemos $r = \frac{6400}{r+6400} \sqrt{r^2 + 2r \times 6400}$, isto é,
 $r = \frac{6400}{r+6400} \sqrt{r^2 + 12800r}$, com $0 < r < 6400$.

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora e usando x como variável independente, obtemos:



$$\begin{aligned} y_1 &= x \\ y_2 &= \frac{6400}{x+6400} \sqrt{x^2 + 12800x} \\ l(a, b) \\ a &\approx 5371,44 \\ b &\approx 5371,44 \end{aligned}$$

Determinamos assim o valor de r , isto é, $r \approx 5371,44$.

Logo, a percentagem da área da superfície terrestre coberta por este satélite é dada por

$$50 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{5371,44}{6400} \right)^2} \right) \approx 23, \text{ isto é, aproximadamente } 23\%.$$

10.

10.1. O declive de reta tangente ao gráfico da função $f \circ g$ no ponto de abscissa $\frac{\pi}{4}$ é igual a $(f \circ g)' \left(\frac{\pi}{4} \right)$.

1º Processo

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\cos x) = \cos^2 x$$

$$(f \circ g)'(x) = (\cos^2 x)' = 2 \cos x \times (\cos x)' = -2 \cos x \sin x = -\sin(2x)$$

$$(f \circ g)' \left(\frac{\pi}{4} \right) = -\sin \left(2 \times \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = -1$$

2º Processo

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x) &= f'(g(x)) \times g'(x) = f'(\cos x) \times (-\sin x) = \\ &= 2 \times \cos x \times (-\sin x) = \\ &= -\sin(2x) \end{aligned}$$

$$(f \circ g)' \left(\frac{\pi}{4} \right) = -\sin \left(2 \times \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = -1$$

Cálculo auxiliar

$$f'(x) = 2x$$

Opção (B)

10.2. Consideremos a função h , de domínio $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, definida por $h(x) = f(x) - g(x)$.

i) h é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, por se tratar da diferença de duas funções contínuas (f é uma função polinomial e g é uma função trigonométrica).

ii) $h(0) = f(0) - g(0) = 0 - 1 = -1 (< 0)$

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9} - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9} - \frac{1}{2}$$

$\pi > 3$, logo $\pi^2 > 9$, ou seja, $\frac{\pi^2}{9} > 1$. Consequentemente, $\frac{\pi^2}{9} - \frac{1}{2} > 1 - \frac{1}{2}$, isto é, $\frac{\pi^2}{9} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2} (> 0)$.

Logo, $h(0) < 0 < h\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[: h(c) = 0$$

isto é:

$$\exists c \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[: f(c) - g(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[: f(c) = g(c)$$

Provamos assim que a equação $f(x) = g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$.

11.

11.1. h é contínua em $x = 1$ se e só se existir $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$, isto é, $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = h(1)$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 + x e^{x-1}) = 1 + 1e^0 = 2$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sin(x-1)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sin(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{\sin(x-1)} \times \frac{1}{(\sqrt{x}+1)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sin(x-1)} \times \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \end{aligned}$$

Consideremos a mudança de variável $x - 1 = y; x \rightarrow 1^+ \Rightarrow y \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\sin y} \times \frac{1}{2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} \times \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y}}_{\text{limite notável}}} \times \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$, então h não é contínua em $x = 1$.

$$\begin{aligned}
11.2. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + xe^{x-1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{x-1}) = \\
&= 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y-1}) = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y}{e^{y+1}} = \\
&= 1 - \frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 1 - \frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} = \\
&= 1 - \frac{1}{e} \times \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{limite notável}}} = 1 - \frac{1}{e} \times \frac{1}{+\infty} = \\
&= 1 - 0 = 1
\end{aligned}$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \rightarrow -\infty$.

12.

$$\begin{aligned}
12.1. \quad f'(x) &= \frac{2 + \ln x}{x} \quad D_{f'} =]0, +\infty[\\
f''(x) &= \frac{(2 + \ln x)' \times x - (2 + \ln x) \times (x)'}{x^2} = \frac{\cancel{x} \times \cancel{x}' - 2 - \ln x}{x^2} = \\
&= \frac{1 - 2 - \ln x}{x^2} = \frac{-1 - \ln x}{x^2} \quad D_{f''} =]0, +\infty[
\end{aligned}$$

Em $\mathbb{R}^+$:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -1 - \ln x = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow -\ln x = 1$$

condição universal em $\mathbb{R}^+$

$$\Leftrightarrow \ln x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$-1 - \ln x$	n.d.	+	0	-
x^2	n.d.	+	+	+
Sinal de f''	n.d.	+	0	-
Sentido das concavidades do gráfico de f	n.d.	$\cup$	n.d.	$\cap$

Cálculos auxiliares

$$\bullet -1 - \ln(e^{-2}) = -1 + 2 = 1 (> 0) \quad \bullet -1 - \ln(e) = -1 - 1 = -2 (< 0)$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]0, \frac{1}{e}]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[\frac{1}{e}, +\infty[$; tem um ponto de inflexão de abcissa igual a $\frac{1}{e}$.

$$\begin{aligned}
12.2. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{-(x-1)(x+1)} = \\
&= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \\
&= -f'(1) \times \frac{1}{2} \quad (\text{pois } f \text{ é derivável em } x=1, \text{ logo } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \text{ existe e é finito}) \\
&= -\frac{2 + \ln(1)}{1} \times \frac{1}{2} = -2 \times \frac{1}{2} = -1
\end{aligned}$$

Opção (B)