

1. $A(a, 0, 0)$ $B(0, b, 0)$ $E(7, 2, 15)$ $G(6, 10, 13)$

$EF: (x, y, z) = (1, -2, 19) + k(-3, -2, 2), k \in \mathbb{R}$

- 1.1. Pretendemos descobrir em qual das quatro opções apresentadas se encontra uma equação vetorial da reta perpendicular à reta EF e que passa no ponto E . Assim, qualquer vetor diretor dessa reta terá que ser perpendicular a qualquer vetor diretor de EF :

$(2, -3, 0) \cdot (-3, -2, 2) = -6 + 6 + 0 = 0$

$(0, 3, -3) \cdot (-3, -2, 2) = -6 - 6 = -12$, o que exclui a opção (B).

$(0, 3, 3) \cdot (-3, -2, 2) = -6 + 6 = 0$

$(2, 0, -3) \cdot (-3, -2, 2) = -6 - 6 = -12$, o que exclui a opção (D).

Averiguemos se o ponto E pertence à reta definida na opção (A):

$(7, 2, 15) = (7, -3, 3) + k(2, -3, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 + 2k \\ 2 = -3 - 3k \\ 15 = 3 + 0k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -\frac{5}{3} \\ 0k = 12 \end{cases} \quad \text{Condição impossível, o que exclui a opção (A).}$$

Averiguemos se E pertence à reta definida na opção (C):

$(7, 2, 15) = (7, -10, 3) + k(0, 3, 3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 + 0k \\ 2 = -10 + 3k \\ 15 = 3 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 \text{ (proposição verdadeira)} \\ k = 4 \\ k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow k = 4$$

Logo, o ponto E pertence à reta.

Opção (C)

1.2. 1º Processo

O ponto B é a interseção do plano ABG com o eixo Oy .

Começamos por determinar uma equação cartesiana do plano ABG .

Sabemos que qualquer vetor diretor de EF é normal ao plano ABG e que G pertence ao plano ABG . Logo, o plano ABG pode ser definido por:

$-3(x - 6) - 2(y - 10) + 2(z - 13) = 0$

$\Leftrightarrow -3x + 18 - 2y + 20 + 2z - 26 = 0$

$\Leftrightarrow -3x - 2y + 2z + 12 = 0$

Como $B(0, b, 0)$ pertence ao plano ABG , vem que:

$-3 \times 0 - 2b + 2 \times 0 + 12 = 0 \Leftrightarrow -2b = -12 \Leftrightarrow b = 6$

$B(0, 6, 0)$

O raio de superfície esférica é $\overline{BD} = \overline{EG}$.

$$\begin{aligned} r = \overline{EG} &= \sqrt{(7 - 6)^2 + (2 - 10)^2 + (15 - 13)^2} = \\ &= \sqrt{1 + 64 + 4} = \\ &= \sqrt{69} \end{aligned}$$

Logo, a equação reduzida da superfície esférica de centro em B e que passa em D é:

$$x^2 + (y - 6)^2 + z^2 = 69$$

2º Processo

O ponto B tem coordenadas $(0, b, 0)$, com $b \in \mathbb{R}^+$.

$$\overrightarrow{GB} = B - G = (0, b, 0) - (6, 10, 13) = (-6, b - 10, -13)$$

$$\overrightarrow{GE} = E - G = (7, 2, 15) - (6, 10, 13) = (1, -8, 2)$$

$$\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GE} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-6, b - 10, -13) \cdot (1, -8, 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -6 - 8b + 80 - 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow -8b = 6 - 80 + 26$$

$$\Leftrightarrow -8b = -48$$

$$\Leftrightarrow b = 6$$

Logo, $B(0, 6, 0)$.

O raio da superfície esférica é igual a $\overline{BD}$, isto é, é igual a $\overline{GE}$:

$$r = \overline{GE} = \|\overrightarrow{GE}\| = \sqrt{1^2 + (-8)^2 + 2^2} = \sqrt{69}$$

Logo, a equação reduzida da superfície esférica de centro em B e que passa em D é:

$$x^2 + (y - 6)^2 + z^2 = 69$$

2. Sabemos que $A(3 \cos \alpha, 3 \sin \alpha)$, $B(3 \cos(\alpha + \pi), 3 \sin(\alpha + \pi))$ e $C(3 \cos(\alpha + \pi), 0)$.

Como $A \in 2^\circ \text{Q}$, $3 \cos \alpha < 0$, logo, $-3 \cos \alpha > 0$.

Como $B \in 4^\circ \text{Q}$, $3 \sin(\alpha + \pi) < 0$, logo, $-3 \sin \alpha < 0 \Leftrightarrow 3 \sin \alpha > 0$.

Consideremos $[BC]$ a base do triângulo.

$$\overline{BC} = |3 \sin(\alpha + \pi)| = 3 \sin \alpha$$

Seja A' a projeção ortogonal de A sobre BC .

A altura do triângulo $[ABC]$ é $\overline{AA'}$:

$$\overline{AA'} = |\text{abscissa de } A| + \text{abscissa de } C =$$

$$= -3 \cos \alpha + 3 \cos(\alpha + \pi) =$$

$$= -3 \cos \alpha - 3 \cos \alpha =$$

$$= -6 \cos \alpha$$

Logo, a área do triângulo $[ABC]$ é dada por:

$$\frac{\overline{BC} \times \overline{AA'}}{2} = \frac{3 \sin \alpha \times (-6 \cos \alpha)}{2} =$$

$$= \frac{-18 \sin \alpha \cos \alpha}{2} =$$

$$= -9 \sin \alpha \cos \alpha$$

3. Consideremos os acontecimentos:

A : "ser português"

B : "ser rapariga"

Sabemos que:

$$\bullet P(B) = 0,6$$

$$\bullet P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,15$$

Pretendemos determinar $P(A | \bar{B})$.

$$P(A | \bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{0,4} = \frac{0,25}{0,4} = 0,625; 62,5\%$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= 0,15 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0,15 \\ &\Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0,15 \\ &\Leftrightarrow 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 0,15 \\ &\Leftrightarrow -P(A) - 0,6 + P(A \cap B) = -0,85 \\ &\Leftrightarrow -P(A) + P(A \cap B) = -0,25 \\ &\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0,25 \end{aligned}$$

Opção (D)

4. ${}^3A_2 \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 \times 4! \times 8!$

3A_2 é o número de maneiras distintas de escolher ordenadamente os dois dirigentes que irão a conduzir.

5C_2 é o número de maneiras distintas de escolher quem são os dois jogadores do sexo masculino que irão no automóvel.

5C_2 é o número de maneiras distintas de escolher quem são as duas jogadoras do sexo feminino que irão no automóvel.

$4!$ é o número de maneiras distintas de permutar os 4 jogadores entre si nos quatro lugares (de não condutor) do automóvel.

$8!$ é o número de maneiras distintas de permutar os 8 ocupantes (que restam depois de escolhidos os que irão no automóvel) pelos oito lugares (de não condutor) da carrinha.

5. Consideremos os acontecimentos:

A: "ter 15 ou 16 anos"

$\bar{A}$: "ter 17 anos"

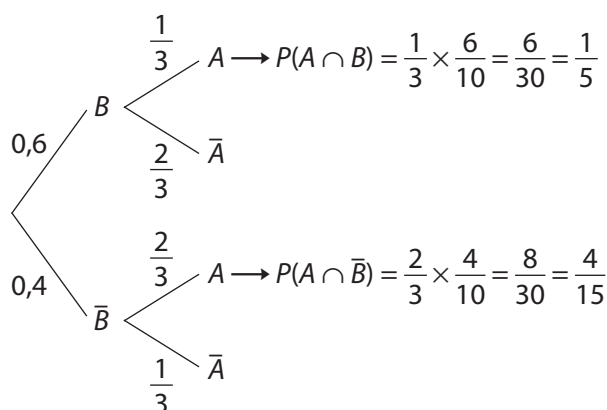
B: "ser rapariga"

Sabemos que:

• $P(B) = 0,6$

• $P(\bar{A} | \bar{B}) = \frac{1}{3}$

• $P(A | B) = \frac{1}{3}$



$$P(A) = \frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{8}{15}$$

${}^{30}C_5$ é o número de maneiras de escolher 5 alunos da turma.

$$\frac{8}{15} \times 30 = 16 \text{ é o número de alunos da turma com 17 anos.}$$

$$\frac{7}{15} \times 30 = 14 \text{ é o número de alunos da turma com 15 ou 16 anos.}$$

O número de casos favoráveis é $1 \times 1 \times {}^{16}C_2 \times 12$.

Logo, a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{1 \times 1 \times {}^{16}C_2 \times 12}{{}^{30}C_5} = \frac{1440}{142\,506} \approx 0,01.$$

6. $v_8 = v_5 \times r^3 \Leftrightarrow 108 = 4 \times r^3$

$$\Leftrightarrow 27 = r^3$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{27}$$

$$\Leftrightarrow r = 3$$

$$v_6 = v_5 \times 3 = 4 \times 3 = 12$$

Opção (A)

7. $u_n = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$$u_n = \begin{cases} 2 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Para n ímpar, $u_n = 2 + \frac{1}{n}$.

$$2 + \frac{1}{n} \geq \frac{83}{41} \quad \wedge \quad 2 + \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{83}{41} - \frac{82}{41} \quad \wedge \quad \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33} - \frac{66}{33}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{41} \quad \wedge \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{33}$$

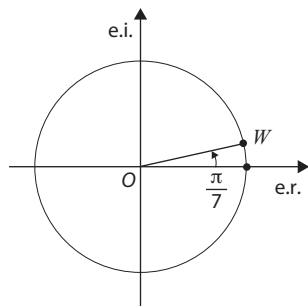
$$\Leftrightarrow n \leq 41 \quad \wedge \quad n \geq 33$$

Como n é ímpar, C.S. = {33, 35, 37, 39, 41}.

Existem 5 termos de ordem ímpar que pertencem ao intervalo $\left[\frac{83}{41}, \frac{67}{33}\right]$.

8. $w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{j\frac{\pi}{4}}}{2e^{j\left(\frac{3\pi}{28}\right)}} = e^{j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{28}\right)} = e^{j\left(\frac{7\pi}{28} - \frac{3\pi}{28}\right)} = e^{j\left(\frac{4\pi}{28}\right)} = e^{j\frac{\pi}{7}}$

Seja W o afixo de w .



O número mínimo de vértices desse polígono será quando estes dois vértices (o afixo de w e o vértice que se encontra sobre o semieixo real positivo) são os extremos de um dos lados desse polígono. Como se trata de um polígono regular:

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{7} \Leftrightarrow n = \frac{7 \times 2\pi}{\pi} \Leftrightarrow n = 14$$

Opção (B)

$$\begin{aligned} 9. \quad w &= \frac{z_1 \times z_2}{z_3} = \frac{(-3 + 2i) \times (1 + 2i)}{2 - i} = \\ &= \frac{-3 - 6i + 2i + 4i^2}{2 - i} = \\ &= \frac{-4 - 3 - 6i + 2i}{2 - i} = \\ &= \frac{-7 - 4i}{2 - i} = \\ &= \frac{(-7 - 4i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \\ &= \frac{-14 - 7i - 8i - 4i^2}{4 - i^2} = \\ &= \frac{-14 + 4 - 15i}{5} = \\ &= \frac{-10 - 15i}{5} = \\ &= -2 - 3i \end{aligned}$$

$$|w| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Seja $\theta = \text{Arg}(w)$.

$$\text{tg } \theta = \frac{3}{2} \wedge \theta \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right[$$

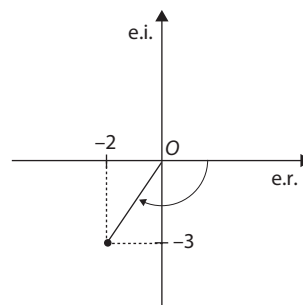
$$\text{Verifica-se que } \text{tg } \theta > 1 \text{ e } 1 = \text{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right).$$

Como a função tangente é crescente no 3º Q, tem-se que:

$$\text{tg } \theta > \text{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \theta > -\frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Logo, } \theta \in \left] -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right[.$$

Como $|w| = \sqrt{13}$ e $\text{Arg}(w) \in \left] -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right[$, a proposição $|w| = \sqrt{13} \wedge \text{Arg}(w) \in \left] -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right[$ é verdadeira.



10.

10.1. f é contínua em $x = 1$ se e só se existir $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, isto é, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2(1 + 2 \ln x)) = -1(1 + 2 \times 0) = -1$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5 - 5e^{x-1}}{x^2 + 3x - 4} = \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-5(e^{x-1} - 1)}{(x-1)(x+4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \times \frac{-5}{x+4} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-5}{x+4} = \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 4 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-4)}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4 \end{aligned}$$

Consideremos a mudança de variável $x - 1 = y$. Se $x \rightarrow 1^+$, então $y \rightarrow 0^+$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}} \times (-1) = \\ &= 1 \times (-1) = \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\bullet f(1) = -1(1 + 2 \ln(1)) = -1 \times 1 = -1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, então a função f é contínua em $x = 1$.

10.2. Em $]0, 1[$: $f(x) = -x^2(1 + 2 \ln x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x(1 + 2 \ln x) - x^2 \left(2 \times \frac{1}{x} \right) = \\ &= -2x(1 + 2 \ln x) - 2x = \\ &= -2x(1 + 2 \ln x + 1) = \\ &= -2x(2 + 2 \ln x) \end{aligned}$$

$$\text{Em }]0, 1[: f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x(2 + 2 \ln x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x = 0 \vee 2 + 2 \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2 \ln x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{e}$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\notin]0, 1[}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$-2x$		-	-	-	
$2 + 2 \ln x$		-	0	+	
$-2x(2 + 2 \ln x)$		+	0	-	
Variação de f		$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{e}\right)$ Máx.	$\searrow$	

Cálculos auxiliares

$$\bullet 2 + 2 \ln \left(\frac{1}{e^2} \right) = 2 + 2 \times (-2) = -2 (< 0)$$

$$\bullet 2 + 2 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right) = 2 + 2 \left(-\frac{1}{2} \right) = 1 (> 0)$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\left(\frac{1}{e}\right)^2 \left(1 + 2 \ln\left(\frac{1}{e}\right)\right) = -\frac{1}{e^2} \times (1 - 2) = \frac{1}{e^2}$$

$\frac{1}{e^2}$ é máximo relativo de f em $x = \frac{1}{e}$; f é estritamente crescente em $\left]0, \frac{1}{e}\right]$; f é estritamente decrescente em $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

11. $D_g = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$g(x) = x \cos x + \sin x$$

$$g'(x) = 1 \times \cos x + x(-\sin x) + \cos x =$$

$$= \cos x - x \sin x + \cos x =$$

$$= 2 \cos x - x \sin x$$

$$D_{g'} = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Pretendemos provar que $\exists c \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[: g'(c) = -\frac{1}{2}$.

1) g' é contínua em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas.

$$2) g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{3\pi}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \times 0 + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$-\pi < -1 < 3\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\frac{1}{2} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow g'\left(\frac{\pi}{2}\right) < -\frac{1}{2} < g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que $\exists c \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[: g'(c) = -\frac{1}{2}$, isto é, existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$.

12. $D_h = \mathbb{R}^+$

Como o domínio de h é limitado inferiormente, só faz sentido procurar assíntota oblíqua ao gráfico de h quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{2x^2 - \ln x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x(2x^2 - \ln x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - \frac{\ln x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x}} = \\
 &= \frac{1}{2 - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{1}{2 - 0 \times 0} = \frac{1}{2} \\
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(h(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - \ln x} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x(2x^2 - \ln x)}{4x^2 - 2 \ln x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - (2x^3 - \ln x)}{4x^2 - 2 \frac{\ln x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + \ln x}{4x^2 - 2 \frac{\ln x}{x}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{4 - 2 \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}{4 - 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \\
 &= \frac{0}{4 - 2 \times 0} = 0
 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = \frac{1}{2}x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h .

13.

13.1. $d = a(0) - 0,9 = 1,44 - 0,9 = 0,54$

Cálculo auxiliar

$$a(0) = 1,8 - (0,216 + 0,0039 \times 0)^{\frac{2}{3}} = 1,8 - 0,216^{\frac{2}{3}} = 1,44$$

Opção (B)

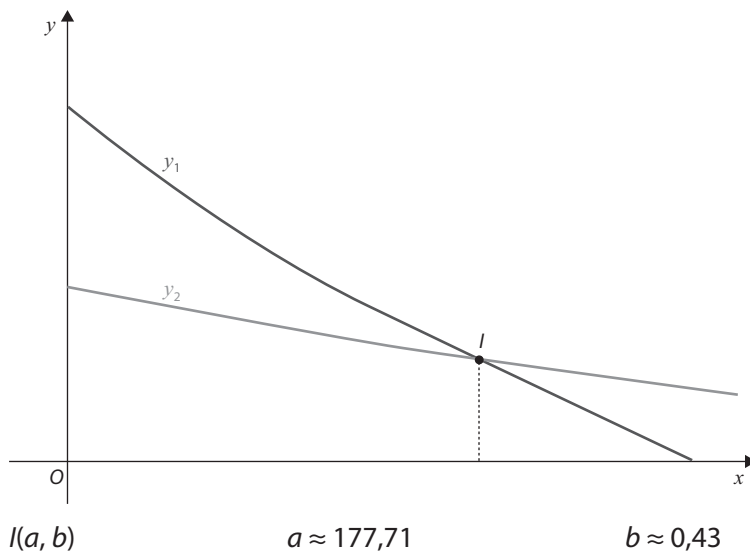
13.2. $a(2t_1) = \frac{1}{2}a(t_1) \Leftrightarrow 1,8 - (0,216 + 0,0039 \times 2t_1)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \left(1,8 - (0,216 + 0,0039 t_1)^{\frac{2}{3}} \right)$

Utilizando a variável x como variável independente, tem-se:

$$1,8 - (0,216 + 0,0039 \times 2x)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \left(1,8 - (0,216 + 0,0039 x)^{\frac{2}{3}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 y_1 &= 1,8 - (0,216 + 0,0039 \times 2x)^{\frac{2}{3}} \\
 y_2 &= \frac{1}{2} \left(1,8 - (0,216 + 0,0039 x)^{\frac{2}{3}} \right)
 \end{aligned}$$

$$x \geq 0$$



$t_1 \approx 177,71$ minutos

$$177,71 - 120 = 57,71$$

↓

2 h

R.: 2 horas e 58 minutos.

14. $D = \{x \in \mathbb{R} : (1-x)e^{x-1} > 0\} =]-\infty, 1[$

Cálculo auxiliar

$$(1-x)e^{x-1} > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0, \text{ pois } e^{x-1} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow 1 > x$$

$$\text{Em }]-\infty, 1[: \ln((1-x)e^{x-1}) = x \Leftrightarrow (1-x)e^{x-1} = e^x$$

$$\Leftrightarrow (1-x)e^{x-1} = e^x$$

$$\Leftrightarrow (1-x) \times \frac{1}{e} \times e^x - e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \left(\frac{1-x}{e} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \left(\frac{1-x-e}{e} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{equação impossível em } \mathbb{R}} \vee \frac{1-x-e}{e} = 0$$

equação impossível em $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 1-x-e=0$$

$$\Leftrightarrow 1-e=x$$

$$\Leftrightarrow x = 1-e$$

$$\text{C.S.} = \{1-e\}$$

$$15. D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$D_g = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$k \in \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = k \operatorname{sen}(2x)$$

$$g(x) = k \cos x$$

$$\text{Em } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]: f(x) = g(x) \Leftrightarrow k \operatorname{sen}(2x) = k \cos x$$

$$\Leftrightarrow k \operatorname{sen}(2x) - k \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow k(\operatorname{sen}(2x) - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \vee \operatorname{sen}(2x) = \cos x$$

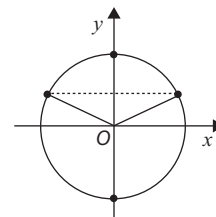
$$\Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0$$

$$k > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2 \operatorname{sen} x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\text{Em } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]: x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{2}$$

$$A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$B\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}k\right)$$

$$C\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$\overrightarrow{BA} = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) - \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}k\right) = \left(-\frac{4\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}k\right) = \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}k\right)$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}k\right) = \left(\frac{2\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}k\right) = \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}k\right)$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}k\right) \cdot \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}k\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\pi^2}{9} + \frac{3}{4}k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}k^2 = \frac{2\pi^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{8\pi^2}{27}$$

$$\Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\frac{8}{27}}\pi$$

$$\Leftrightarrow k = \pm \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{27}}$$

$$\Leftrightarrow k = \pm \frac{2\sqrt{54}\pi}{27}$$

$$\Leftrightarrow k = \pm \frac{6\sqrt{6}\pi}{27}$$

$$\Leftrightarrow k = \pm \frac{2\sqrt{6}\pi}{9}$$

$$\text{Como } k \in \mathbb{R}^+, k = \frac{2\sqrt{6}\pi}{9}.$$