

1.

$$\begin{aligned}
 1.1. \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{8(n+1) - 4}{n+1+1} - \frac{8n-4}{n+1} = \frac{8n+8-4}{n+2} - \frac{8n-4}{n+1} = \\
 &= \frac{8n+4}{n+2} - \frac{8n-4}{n+1} = \\
 &= \frac{(8n+4)(n+1) - (8n-4)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \\
 &= \frac{8n^2 + 8n + 4n + 4 - (8n^2 + 16n - 4n - 8)}{(n+2)(n+1)} = \\
 &= \frac{8n^2 + 12n + 4 - 8n^2 - 12n + 8}{(n+2)(n+1)} = \\
 &= \frac{12}{(n+2)(n+1)}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} n+2 > 0, \forall n \in \mathbb{N} \\ n+1 > 0, \forall n \in \mathbb{N} \\ 12 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{12}{(n+2)(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, donde se conclui que (u_n) é monótona crescente.

$$\begin{aligned}
 1.2. \quad \lim_{x \rightarrow 8^-} f(u_n) &= \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} \log_2(8-x) = \\
 &= \log_2(0^+) = \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r}
 \cancel{8n-4} - 4 \quad | \quad n+1 \\
 \hline
 \cancel{8n-8} \\
 \hline
 -12 \\
 \hline
 \frac{8n-4}{n+1} = 8 - \frac{12}{n+1} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n-4}{n+1} = \lim \left(8 - \frac{12}{n+1} \right) = 8^-
 \end{array}$$

Opção (A)

2. **Números de casos possíveis:**

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

Números de casos favoráveis:

$${}^4C_2 \times 1 \times 1 \times 4 \times 4 = 96$$

A probabilidade pedida é igual a $\frac{96}{5^4} = 0,1536$.

Opção (D)

3.

3.1. $a \rightarrow$ número de bolas azuis $b \rightarrow$ número de bolas brancas

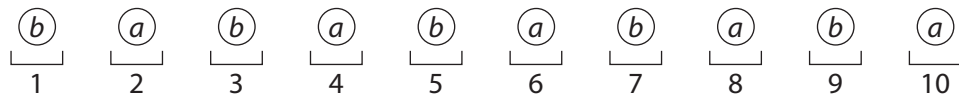
$$\begin{aligned}
 P(A \cap B) &= \frac{1}{3} P(A) \Leftrightarrow P(B|A) \times P(A) = \frac{1}{3} P(A) \\
 &\Leftrightarrow P(B|A) = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$P(B|A)$ representa a probabilidade de a segunda bola retirada ser branca, sabendo que a primeira bola retirada foi azul. Atendendo a que $P(B|A) = \frac{1}{3}$, então:

$$\begin{aligned}
 \frac{b}{a+b-1} &= \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3b = a+b-1 \\
 &\Leftrightarrow 2b = a-1
 \end{aligned}$$

Como $b \in \mathbb{N}$, então $2b$ é par, isto é, $a-1$ é par, logo a é ímpar.

- 3.2.** Consideremos agora que no saco existem 8 bolas azuis e 7 bolas brancas. Começemos por colocar uma bola azul em cada uma das caixas com um número par e uma bola branca em cada uma das caixas com um número ímpar.



Depois de colocadas uma bola azul em cada uma das caixas com um número par e uma bola branca em cada uma das caixas com um número ímpar restam:

$$8 - 5 = 3 \text{ bolas azuis}$$

$$7 - 5 = 2 \text{ bolas brancas}$$

Logo, teremos que determinar o número de maneiras distintas de escolher de entre as 10 caixas, quais as 3 caixas onde serão colocadas as 3 bolas azuis restantes (uma em cada caixa) e, por cada uma destas maneiras, escolher das 7 caixas restantes quais as 2 caixas que serão ocupadas com as 2 bolas brancas restantes (uma em cada caixa):

$${}^{10}C_3 \times {}^7C_2 = 2520$$

Opção (B)

4.

4.1. $z = |z|e^{i\theta}$

$$z^2 = \bar{z} \Leftrightarrow |z|^2 e^{i(2\theta)} = |\bar{z}| e^{i(-\theta)}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = |\bar{z}| \wedge 2\theta = -\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = |z| \wedge 3\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 - |z| = 0 \wedge \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow |z|(|z| - 1) = 0 \wedge \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow (|z| = 0 \vee |z| = 1) \wedge \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee \left(|z| = 1 \wedge \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$k = 0 \rightarrow 1e^{i(0)}$$

$$k = 1 \rightarrow 1e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$k = 2 \rightarrow 1e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$$

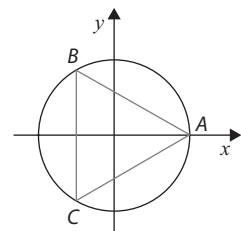
$$\text{C.S.} = \left\{ 0, e^{i(0)}, e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}, e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} \right\}$$

Os afixos dos números complexos $e^{i(0)}$, $e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ e $e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$ são vértices de um triângulo equilátero.

$$A(1, 0) \text{ e } B\left(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}\right), \text{ ou seja, } B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Assim, } P_{[ABC]} = 3\sqrt{3} \text{ u.c.}$$



4.2. $\text{Re}(z) \times \text{Im}(z) = 1$

$$\text{Seja } z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}.$$

$$x \times y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$$

Opção (D)

5. $A(0, a, 0)$, com $a \in \mathbb{R}^+$
 $B(b, 0, 0)$, com $b \in \mathbb{R}^+$
 $ABC: 3x + 4y + 4z - 12 = 0$

5.1. $V_{\text{cilindro}} = 10\pi \Leftrightarrow \pi \times \overline{BC}^2 \times h = 10\pi$
 $\Leftrightarrow \overline{BC}^2 \times h = 10$

Como B pertence ao plano ABC , então:

$$3b + 4 \times 0 + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3b = 12 \Leftrightarrow b = 4$$

Logo, $B(4, 0, 0)$.

Como A pertence ao plano ABC , então:

$$3 \times 0 + 4a + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow 4a = 12 \Leftrightarrow a = 3$$

Logo, $A(0, 3, 0)$.

Uma vez que A é o centro de uma das bases do cilindro e o ponto B é o centro da outra base e se trata de um cilindro reto, então $h = \overline{AB}$.

$$h = \overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Assim:

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 \times h = 10 &\Leftrightarrow \overline{BC}^2 \times 5 = 10 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{2} \\ \overline{BC} > 0 \end{aligned}$$

- 5.2. Seja P' a projeção ortogonal de P sobre o plano ABC .
 P' é o ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P .
 Começemos por definir vetorialmente a reta PP' :

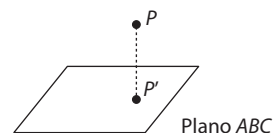
$$(x, y, z) = (3, 5, 6) + k(3, 4, 4), k \in \mathbb{R}$$

(o vetor de coordenadas $(3, 4, 4)$ é um vetor diretor da reta, pois a reta PP' é perpendicular ao plano ABC que admite o vetor de coordenadas $(3, 4, 4)$ como vetor normal).

Assim, $(3 + 3k, 5 + 4k, 6 + 4k)$, com $k \in \mathbb{R}$ é um ponto genérico da reta PP' . Substituindo estas coordenadas na equação que define o plano ABC , tem-se:

$$\begin{aligned} 3(3 + 3k) + 4(5 + 4k) + 4(6 + 4k) - 12 &= 0 \Leftrightarrow 9 + 9k + 20 + 16k + 24 + 16k - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow 41k = -41 \\ &\Leftrightarrow k = -1 \end{aligned}$$

Logo, $P'(3 - 3, 5 - 4, 6 - 4)$, ou seja, $P'(0, 1, 2)$.



6. $r: y = 2x + 4$
 $m_r = 2$
 Seja α a inclinação da reta r . Então:
 $\text{tg } \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = \text{tg}^{-1}(2)$
 $\alpha \approx 1,107$
 Logo, $\hat{STU} \approx \pi - 1,107 \approx 2,03$

Opção (C)

7. $\alpha = \pi$
 $\alpha = 0$

- 7.1. $d(0) = \cos(0) + \sqrt{9 - \text{sen}^2(0)} = 1 + 3 = 4$
 Comprimento da biela = $4 - 1 = 3$

Opção (B)

7.2. $t \in [0, 5]$

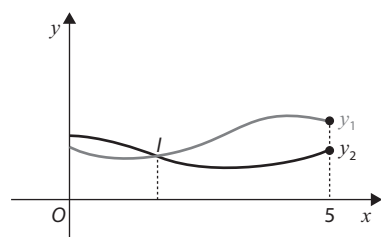
$d(t+2) = 0,75d(t)$, ou seja,

$$\cos(t+2) + \sqrt{9 - \sin^2(t+2)} = 0,75(\cos t + \sqrt{9 - \sin^2 t})$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora e introduzindo as seguintes expressões analíticas:

$$y_1 = \cos(x+2) + \sqrt{9 - \sin^2(x+2)}$$

$$y_2 = 0,75(\cos x + \sqrt{9 - \sin^2 x})$$



$l(a, b)$

$$a \approx 1,63$$

$$b \approx 2,08$$

$$d(1,63) = \cos(1,63) + \sqrt{9 - \sin^2(1,63)}$$

$$\approx 2,8 \text{ cm}$$

A distância pedida é 2,8 cm.

8. Seja α o ângulo que a semirreta $\dot{OA}$ faz com o semieixo positivo Ox .

$B(\cos \alpha, \sin \alpha)$

Por um lado, $A(1, a)$ e, por outro lado, $A(1, \operatorname{tg} \alpha)$.

Logo, $\operatorname{tg} \alpha = a$.

Sabemos que:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Logo:

$$1 + a^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + a^2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + a^2}} \vee \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + a^2}}$$

Como $\cos \alpha > 0$, então $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + a^2}}$, ou seja, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$

Opção (A)

9. $D_f =]-\infty, 2]$ $f(x) = x + \ln(e^x + 1)$

$$\begin{aligned} 9.1. \quad m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \ln(e^x + 1)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \right) = \\ &= 1 + \frac{\ln(0 + 1)}{-\infty} = \\ &= 1 + \frac{0}{-\infty} = \\ &= 1 + 0 = \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\cancel{x} + \ln(e^x + 1) - \cancel{x}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = \ln(0 + 1) = \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

9.2. Em $]-\infty, 2]$:

$$\begin{aligned}
 f(x) = 2x + 1 &\Leftrightarrow x + \ln(e^x + 1) = 2x + 1 \Leftrightarrow \ln(e^x + 1) = x + 1 \\
 &\Leftrightarrow e^x + 1 = e^{x+1} \\
 &\Leftrightarrow e^x + 1 = e^x \times e \\
 &\Leftrightarrow e^x - e^x \times e = -1 \\
 &\Leftrightarrow e^x(1 - e) = -1 \\
 &\Leftrightarrow e^x = \frac{-1}{1 - e} \\
 &\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{-1}{1 - e}\right) \\
 &\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{e - 1}\right) \\
 &\Leftrightarrow x = \ln(1) - \ln(e - 1) \\
 &\Leftrightarrow x = 0 - \ln(e - 1) \\
 &\Leftrightarrow x = -\ln(e - 1)
 \end{aligned}$$

Como $e > 2$, então:

$$\begin{aligned}
 e - 1 &> 1 \\
 \ln(e - 1) &> 0 \\
 -\ln(e - 1) &< 0
 \end{aligned}$$

Logo, $-\ln(e - 1)$ pertence a $]-\infty, 2]$ e, conseqüentemente, é a solução da equação.

9.3. $h(x) = f(x) - x \Leftrightarrow h(x) = x + \ln(e^x + 1) - x \Leftrightarrow h(x) = \ln(e^x + 1)$ $D_h =]-\infty, 2]$

$$\begin{aligned}
 y = \ln(e^x + 1) &\Leftrightarrow e^x + 1 = e^y \Leftrightarrow e^x = e^y - 1 \\
 &\Leftrightarrow x = \ln(e^y - 1)
 \end{aligned}$$

Logo, $h^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$.

Opção (C)

10.

10.1. g é contínua em $x = 0$ se e só se existir $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, isto é, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$.

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{\sin x}{1 - e^x}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 - e^x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{e^x - 1}{x}}\right) = \\
 &= 1 - \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}} = \\
 &= 1 - \frac{1}{1} = \\
 &= 1 - 1 = \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{y^2} \times \ln\left(\frac{1}{y}\right)\right] =$$

Consideremos a mudança variável $\frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}; x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln y}{y^2} \right) = \\
&= - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln y}{y} \times \frac{1}{y} \right) = \\
&= - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} = \\
&= -0 \times 0 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

• $g(0) = 0$

Logo, g é contínua em $x = 0$.

10.2. Em $]0, +\infty[$: $g(x) = x^2 \ln x$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = \\
&= 2x \ln x + x = \\
&= x(2 \ln x + 1)
\end{aligned}$$

Em $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
g'(x) = 0 &\Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\notin]0, +\infty[} \vee 2 \ln x + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}
\end{aligned}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
x		+	+	+
$2 \ln x + 1$		-	0	+
Sinal de g'		-	0	+
Variação de g		$\searrow$	mín.	$\nearrow$

Cálculos auxiliares

• $2 \ln \left(\frac{1}{e} \right) + 1 = -2 + 1 = -1 (< 0)$

• $2 \ln (1) + 1 = 1 (> 0)$

• $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \ln \left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{e} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$

g é decrescente em $\left]0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ e crescente em $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right[$.

$-\frac{1}{2e}$ é extremo relativo para $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.