

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2 + \frac{4}{n} \right)}{n \left(3 + \frac{5}{n} \right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{n}}{3 + \frac{5}{n}} = \frac{2}{3}$$

Opção (A)

2. Introduzimos nas listas da calculadora os dados referentes à produção de pera (lista 1) e de maçã (lista 2), em kg/ha, em cada ano, de 2019 a 2023, e obtivemos os seguintes valores:

I – c)

$21\,330 - 12\,197 = 9133$ (mediana da produção de pera: 12 197); (mediana da produção de maçã: 21 330)

II – b)

$$\frac{26\,644 - 20\,087}{20\,087} \times 100 \approx 33\%$$

III – c)

$$14\,485,8 + 4136,16 = 18\,621,96$$

IV – b)

$$0,6 \times 136\,270 = 81\,762$$

$$81\,762 - (17\,530 + 11\,565 + 20\,208 + 12\,197 + 10\,929) = 9333$$

3.

- 3.1 f é contínua em $x = 0$ se existir $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, isto é, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} - 1}{-x} =$$

$$\begin{aligned} -x &= y \\ x \rightarrow 0^- &\Rightarrow y \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} =$$

$$= 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x + 1} =$$

$$= \frac{0 + 1}{1} =$$

$$= 1$$

$$\bullet f(0) = 1$$

Logo, f é contínua em $x = 0$.

3.2 1.º Processo

A reta de equação $y = x - 1$ é assíntota ao gráfico da função f , quando $x \rightarrow +\infty$, se $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x + 1} - x + 1 \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln(ex + e) - x^2 - x + x + 1}{x + 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(e(x + 1))}{x + 1} + \frac{1}{x + 1} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e) + \ln(x + 1)}{x + 1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} + 0 = \\
 &= 0 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} + 0 = \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x + 1 &= y \\
 x \rightarrow +\infty &\Rightarrow y \rightarrow +\infty
 \end{aligned}$$

2.º Processo

$y = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x + 1}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x^2 + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(ex + e)}{x^2 + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \times \frac{\ln(e(x + 1))}{x + 1} \right) = \\
 &= \frac{1}{1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e) + \ln(x + 1)}{x + 1} = \\
 &= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x + 1} \times \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} \right) = \\
 &= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x + 1} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} \right] = \\
 &= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 1} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} \right] = \\
 &= 1 + 0 \times (0 + 0) = \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x + 1 &= y \\
 x \rightarrow +\infty &\Rightarrow y \rightarrow +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x + 1} - x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln(ex + e) - x^2 - x}{x + 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e(x + 1)) - x}{x + 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e) + \ln(x + 1) - x}{x + 1} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln(x+1) - x}{x+1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1) + (-x+1)}{x+1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{x+1} = \\
&= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \\
&= 0 + \frac{-1}{1} = \\
&= -1
\end{aligned}$$

$x+1=y$ $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$
--

A reta de equação $y = x - 1$ é assíntota não vertical ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
4. \quad D &= \left\{ x \in \mathbb{R} : (4-x)^2 > 0 \wedge 4-x > 0 \wedge 7-2x > 0 \right\} = \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 4 \wedge x < 4 \wedge x < \frac{7}{2} \right\} = \\
&=]-\infty, \frac{7}{2}[
\end{aligned}$$

Em $]-\infty, \frac{7}{2}[$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} e^x \ln(4-x)^2 - 5 \ln(4-x) = (5-e^x) \ln(7-2x) \\
\Leftrightarrow 2 \times \frac{1}{2} e^x \ln(4-x) - 5 \ln(4-x) &= (5-e^x) \ln(7-2x) \\
\Leftrightarrow \ln(4-x) (e^x - 5) &= (5-e^x) \ln(7-2x) \\
\Leftrightarrow \ln(4-x) (e^x - 5) - (5-e^x) \ln(7-2x) &= 0 \\
\Leftrightarrow \ln(4-x) (e^x - 5) + (e^x - 5) \ln(7-2x) &= 0 \\
\Leftrightarrow (e^x - 5) [\ln(4-x) + \ln(7-2x)] &= 0 \\
\Leftrightarrow (e^x - 5) (\ln(28 - 15x + 2x^2)) &= 0 \\
\Leftrightarrow e^x - 5 = 0 \vee \ln(28 - 15x + 2x^2) &= 0 \\
\Leftrightarrow e^x = 5 \vee 2x^2 - 15x + 28 &= 1 \\
\Leftrightarrow x = \ln(5) \vee 2x^2 - 15x + 27 &= 0 \\
\Leftrightarrow x = \ln(5) \vee x = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \times 2 \times 27}}{4} \\
\Leftrightarrow x = \ln(5) \vee x = 3 \vee x = \frac{9}{2} \\
\text{C.S.} &= \{\ln(5), 3\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad P(\overline{B}) &= P(\overline{B} \cap A) + P(\overline{B} \cap \overline{A}) = \\
&= 0,5 + 0,3 = \\
&= 0,8 \\
P(B) &= 1 - P(\overline{B}) = \\
&= 1 - 0,8 = \\
&= 0,2
\end{aligned}$$

Opção (A)

6. $0,64 \times 25 = 16$ rapazes
 $25 - 16 = 9$ raparigas
 $\frac{3}{4} \times 16 = 12$ rapazes com 17 anos
 $\frac{1}{3} \times 9 = 3$ raparigas com 18 anos

	17 anos	18 anos	Total
Rapazes	12	4	16
Raparigas	6	3	9
Total	18	7	25

Número de casos possíveis: ${}^{25}C_6 = 177\,100$

Número de casos favoráveis: $1 \times 1 \times 16 \times {}^7C_3 = 560$

A probabilidade pedida é igual a $\frac{16 \times {}^7C_3}{{}^{25}C_6} \approx 0,003$

7. $\hat{ZOM} = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{15} = \frac{15\pi}{60} - \frac{8\pi}{60} = \frac{7\pi}{60}$

$\hat{MOW} = \hat{ZOM} = \frac{7\pi}{60}$, pois o triângulo $[ZOW]$ é isósceles e M é o ponto médio do segmento de reta $[ZW]$.

Assim, um argumento de W é:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{15} + 2 \times \frac{7\pi}{60} &= \frac{2\pi}{15} + \frac{7\pi}{30} = \\ &= \frac{11\pi}{30} \end{aligned}$$

Opção (D)

8. $z = \frac{5a i^{15}}{1-2i} + \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}} =$ $15 = 4 \times 3 + 3$

$$= \frac{5a i^3}{1-2i} + \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) =$$

$$= \frac{-5a i}{1-2i} + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) =$$

$$= \frac{-5a i(1+2i)}{1^2 - 4i^2} + 1 - i =$$

$$= \frac{-5a i + 10a}{5} + 1 - i =$$

$$= -a i + 2a + 1 - i =$$

$$= 1 + 2a + (-a-1)i$$

Uma vez que $\text{Im}(z) = \text{Re}(z) = 1$:

$$-a - 1 - 1 - 2a = 1 \Leftrightarrow -3a = 3$$

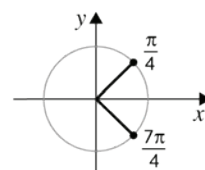
$$\Leftrightarrow a = -1$$

$$z = 1 + 2(-1) + (1-1)i =$$

$$= 1 - 2 =$$

$$= -1 =$$

$$= 1e^{i\pi}$$



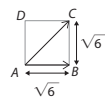
9. Tem-se que $A(\underbrace{\cos \alpha}_{\ominus}, \underbrace{\sen \alpha}_{\oplus})$, $C(0, \sen \alpha)$ e $B(1, \underbrace{\tg \alpha}_{\ominus})$.

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AC} \times h}{2} = \frac{-\cos \alpha \times (\sen \alpha - \tg \alpha)}{2} = \\ &= \frac{-\sen \alpha \cos \alpha + \sen \alpha}{2} = \\ &= \frac{2 \sen \alpha - 2 \sen \alpha \cos \alpha}{4} = \\ &= \frac{2 \sen \alpha - \sen(2\alpha)}{4} \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} 10.1 \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{AB, AC}) = \\ &= \sqrt{6} \times \sqrt{12} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \sqrt{72} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= 6 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar



$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AC}\|^2 &= 6 + 6 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 12 \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{12} \end{aligned}$$

Opção (D)

$$10.2 \quad V_{\text{pirâmide}} = 4\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \times (\sqrt{6})^2 \times h &= 4\sqrt{6} \Leftrightarrow h = \frac{12\sqrt{6}}{6} \\ &\Leftrightarrow h = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{MV} = k(2, -1, 1), \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{MV}\| &= 2\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{4k^2 + k^2 + k^2} = 2\sqrt{6} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{6} \times |k| = 2\sqrt{6} \\ &\Leftrightarrow |k| = 2 \\ &\Leftrightarrow k = 2 \vee k = -2 \end{aligned}$$

• Se $k = 2$

$$\overrightarrow{MV} = (4, -2, 2)$$

$$V = M + \overrightarrow{MV} =$$

$$\begin{aligned} &= (2, -1, 3) + (4, -2, 2) = \\ &= (6, -3, 5) \end{aligned}$$

• Se $k = -2$

$$\overrightarrow{MV} = (-4, 2, -2)$$

$$V = M + \overrightarrow{MV} =$$

$$\begin{aligned} &= (2, -1, 3) + (-4, 2, -2) = \\ &= (-2, 1, 1) \end{aligned}$$

Como V tem abscissa positiva, então $V(6, -3, 5)$.

10.3 Pretende-se determinar o número total de formas possíveis de pintar as cinco faces da pirâmide, respeitando as condições do enunciado.

Existem dois casos mutuamente exclusivos: ou são utilizadas quatro das seis cores disponíveis ou são utilizadas cinco das seis cores disponíveis.

No primeiro caso, existem ${}^6C_4 \times 2 \times 4!$ maneiras distintas.

6C_4 é o número de maneiras de escolher quatro das seis cores disponíveis para pintar as faces da pirâmide com quatro cores; para cada uma destas maneiras, existem duas maneiras de escolher as duas faces opostas que têm de ser pintadas com a mesma cor e, para cada uma destas escolhas, existem $4!$ maneiras de pintar as faces da pirâmide usando as quatro cores escolhidas.

No segundo caso, existem 6A_5 maneiras distintas.

6A_5 é o número de maneiras distintas de pintar as faces da pirâmide com cinco das seis cores disponíveis, permutando as cores pelas faces.

11.

11.1 $g'(x) = \cos(3x) + \frac{3}{2}x + 1$ $g''(x) = -3 \sin(3x) + \frac{3}{2}$

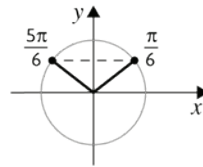
$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -3 \sin(3x) + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3 \sin(3x) = -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(3x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$



Em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[: x = \frac{\pi}{18} \vee x = \frac{5\pi}{18}$

x	0		$\frac{\pi}{18}$		$\frac{5\pi}{18}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinal de g''		+	0	-	0	+	
Sentido das concavidades do gráfico de g		∪	P.I.	∩	P.I.	∪	

Cálculos auxiliares

$$\bullet 0 < x < \frac{\pi}{18} \Leftrightarrow 0 < 3x < \frac{\pi}{6}$$

$$0 < \sin(3x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < -3 \sin(3x) < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < -3 \sin(3x) + \frac{3}{2} < \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < g''(x) < \frac{3}{2}$$

$$\bullet \frac{5\pi}{18} < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} < 3x < \frac{3\pi}{2}$$

$$-1 < \sin(3x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < -3 \sin(3x) < 3$$

$$\Leftrightarrow 0 < -3 \sin(3x) + \frac{3}{2} < \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < g''(x) < \frac{9}{2}$$

$$\bullet g''\left(\frac{2\pi}{18}\right) = g''\left(\frac{\pi}{9}\right) = -3 \sin\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \frac{3}{2} =$$

$$= -3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{3}{2} =$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} < 0$$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{\pi}{18}\right[$ e em $\left[\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{2}\right[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}\right]$. Apresenta dois pontos de inflexão de abscissas $\frac{\pi}{18}$ e $\frac{5\pi}{18}$.

11.2 $r: y = mx + b$

$$m = g'(0) = \cos(0) + 0 + 1 = 2$$

$$r: y = 2x + b$$

$$s: y = -\frac{1}{2}x + b'$$

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2}$$

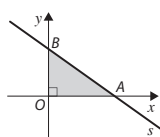
$$12 = \frac{2b' \times b'}{2}$$

$$\Leftrightarrow (b')^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow b' = \sqrt{12}, \text{ pois } b' > 0.$$

$$\text{Logo, } a = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}.$$

Cálculo auxiliar



$A(a, 0)$

$$0 = -\frac{1}{2}a + b' \Leftrightarrow \frac{1}{2}a = b' \Leftrightarrow a = 2b'$$

12. $p \times N(p) = 4000, 2 \leq p \leq 10$

Usando x como variável independente:

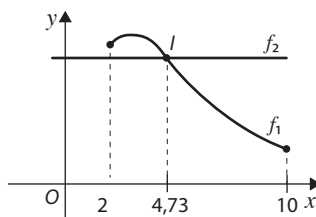
$$x \times (4000e^{-0,34x} - 1,12x + 50) = 4000, 2 \leq x \leq 10$$

$$f_1(x) = x(4000e^{-0,34x} - 1,12x + 50)$$

$$f_2(x) = 4000$$

$$p \approx 4,73$$

O preço pedido é de 473 euros.



13. Seja (a_n) a sucessão das áreas dos quadrados obtidos em cada composição.

$$a_1 = 9 \quad \rightarrow \times \frac{8}{9}$$

$$a_2 = 8$$

$$a_3 = 8 \times \frac{8}{9} \quad \rightarrow \times \frac{8}{9}$$

Cada uma das composições seguintes obtém-se decompondo cada um dos quadrados obtidos na composição anterior em 9 quadrados iguais e removendo os quadrados centrais, isto é, $a_n = \frac{8}{9} \times a_{n-1}$.

Logo, (a_n) é uma progressão geométrica de primeiro termo 9 e razão $\frac{8}{9}$.

$$a_n = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$$

$$a_{50} = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{49} \approx 0,028$$

14. $a \in \mathbb{R}^+$

$$D_h = [0, a]$$

$$D'_h = [0, a]$$

$$h(x) = x \Leftrightarrow h(x) - x = 0$$

Seja f a função de domínio $[0, a]$ definida por $f(x) = h(x) - x$.

i. f é contínua em $[0, a]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas.

ii. $f(0) = h(0) - 0 = h(0) \geq 0$, pois $D'_h = [0, a]$

$$f(a) = h(a) - a$$

$$0 \leq h(a) \leq a$$

$$-a \leq h(a) - a \leq 0 \Leftrightarrow -a \leq f(a) \leq 0$$

- Se $f(0) = 0$, então $h(0) - 0 = 0 \Leftrightarrow h(0) = 0$, a interseção existe no ponto de coordenadas $(0, 0)$.
- Se $f(a) = 0$, então $h(a) - a = 0 \Leftrightarrow h(a) = a$, a interseção existe no ponto de coordenadas (a, a) .
- Se $f(a) < 0$ e $f(0) > 0$, então $f(a) < 0 < f(0)$.

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c \in]0, a[: f(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]0, a[: h(c) - c = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]0, a[: h(c) = c$$

ou seja, existe, pelo menos, um ponto do gráfico da função h que pertence à bissetriz do primeiro quadrante.