

1. (A) $\lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}$

(B) $\lim \left(-\frac{n^2+1}{n}\right) = \lim \left(-n - \frac{1}{n}\right) = -\infty - 0 = -\infty$

(C) $\lim \left(\frac{4n+3}{3n+4}\right) = \lim \frac{4 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{4}{n}} = \frac{4}{3}$

(D) $\lim \frac{(-1)^n}{n} = \lim \left((-1)^n \times \frac{1}{n}\right) = 0$, pois $-1 \leq (-1)^n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Ou:

$$\frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$\lim \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ e $\lim \frac{1}{n} = 0$

Logo, $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Opção (D)

2. Seja (u_n) a sucessão cujos termos são os perímetros dos sucessivos triângulos.

$$\begin{aligned} u_1 &= 3 \times 1 = 3 \\ u_2 &= 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ u_3 &= 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ u_4 &= 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \nearrow \times \frac{1}{2} \\ \nearrow \times \frac{1}{2} \\ \nearrow \times \frac{1}{2} (\dots) \end{array}$$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo 3.

$$S_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$S_n < 6 \Leftrightarrow 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 6 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0 \quad \text{Condição universal em } \mathbb{N}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$ é uma proposição verdadeira. Logo, a soma dos perímetros dos n triângulos da sequência é menor do que 6 unidades, qualquer que seja o valor de n .

3. $\frac{5}{1} \times \frac{5}{1} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = {}^6C_2 = 61\,440$

Opção (B)

4. Sabemos que:

• $P(A) = P(B)$

• $P(\bar{A}) = 0,6$, logo, $P(A) = 0,4$ e, consequentemente, $P(B) = 0,4$.

• $P(A \cup \bar{B}) = 0,7 \Leftrightarrow P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = 0,7$
 $\Leftrightarrow 0,4 + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) = 0,7$
 $\Leftrightarrow 0,4 + 1 - 0,4 - 0,4 + P(A \cap B) = 0,7$
 $\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,1$

$$P((A \cup \bar{B}) \mid B) = \frac{P((A \cup \bar{B}) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup \overbrace{(\bar{B} \cap B)}^{\emptyset})}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$$

5. ${}^{6n+1}C_2 \rightarrow$ Número de casos possíveis.

${}^6C_2 \times n \rightarrow$ Número de casos favoráveis.

$$\begin{aligned} \frac{n \times {}^6C_2}{{}^{6n+1}C_2} &= \frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{15n}{{}^{6n+1}C_2} = \frac{5}{49} \\ &\Leftrightarrow \frac{15n}{\frac{(6n+1) \times 6n}{2}} = \frac{5}{49} \\ &\Leftrightarrow \frac{30n}{(6n+1) \times 6n} = \frac{5}{49} \\ &\Leftrightarrow \frac{30}{6(6n+1)} = \frac{5}{49} \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{6n+1} = \frac{5}{49} \\ &\Leftrightarrow 6n+1 = 49 \\ &\Leftrightarrow 6n = 48 \\ &\Leftrightarrow n = 8 \end{aligned}$$

O valor de n é 8.

6. $(1, 5)$ pertence ao gráfico da função f , logo $f(1) = 5$.

$(2, 7)$ pertence ao gráfico da função f , logo $f(2) = 7$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(1) = 5 \\ f(2) = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + e^b = 5 \\ a + e^{2b} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - e^b \\ 5 - e^b + e^{2b} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ e^{2b} - e^b - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ e^b = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ e^b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} \text{_____} \\ e^b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - 2 \\ e^b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \ln(2) \end{cases} \end{aligned}$$

Equação impossível em $\mathbb{R}$

Assim, $a = 3$ e $b = \ln(2)$.

$$\begin{aligned}
 7. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(2x)}{2x} = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 2 \times 1 = 2 \\
 &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Mudança de variável} \\ \boxed{2x=y} \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array}
 \end{aligned}$$

Opção (D)

8. Sabe-se que $A(4, 0, 0)$, $G\left(12, \frac{13}{2}, 2\right)$ e que $EL: (x, y, z) = (-2, -8, 4) + k(3, 4, 0)$, $k \in \mathbb{R}$.

8.1 Seja M o ponto médio de $[AG]$.

$$M\left(\frac{4+12}{2}, \frac{0+\frac{13}{2}}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$$

$$M\left(8, \frac{13}{4}, 1\right)$$

$$\begin{aligned}
 d = d(A, G) &= \sqrt{(4-12)^2 + \left(0 - \frac{13}{2}\right)^2 + (0-2)^2} = \\
 &= \sqrt{64 + \frac{169}{4} + 4} = \\
 &= \frac{21}{2}
 \end{aligned}$$

$$r = \frac{21}{4}; r^2 = \frac{441}{16}$$

Uma equação que define a superfície esférica de diâmetro $[AG]$ é:

$$(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{16}$$

Opção (A)

8.2 F é a interseção da reta GF como o plano AFE .

GF é paralela a EL , logo pode ser definida por $(x, y, z) = \left(12, \frac{13}{2}, 2\right) + k(3, 4, 0)$, $k \in \mathbb{R}$.

AFE admite como vetor normal o vetor de coordenadas $(3, 4, 0)$, pois EL é perpendicular a AFE :

$$3x + 4y + d = 0$$

Como $A(4, 0, 0)$ pertence ao plano AFE , vem que:

$$3 \times 4 + 4 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$$

$$AFE: 3x + 4y - 12 = 0$$

$\left(12 + 3k, \frac{13}{2} + 4k, 2\right)$, com $k \in \mathbb{R}$ é um ponto genérico da reta GF . Substituindo as suas coordenadas na equação do plano AFE , vem:

$$\begin{aligned}
 3(12 + 3k) + 4\left(\frac{13}{2} + 4k\right) - 12 &= 0 \Leftrightarrow 36 + 9k + 26 + 16k - 12 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 25k = -50 \\
 &\Leftrightarrow k = -2
 \end{aligned}$$

$$k = -2 \rightarrow \left(12 + 3 \times (-2), \frac{13}{2} + 4 \times (-2), 2\right)$$

$$F\left(6, -\frac{3}{2}, 2\right)$$

9. Seja $x = \overline{EB} = \overline{OD}$. Então, $x = \frac{\overline{OA}}{3} \Leftrightarrow \overline{OA} = 3x$.

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OA}}{4} = \frac{3x}{4} \quad \text{e} \quad \overline{DA} = \overline{OA} - \overline{OD} = 3x - x = 2x$$

$$\overline{DC} \cdot \overline{DE} = -7 \Leftrightarrow (\overline{DO} + \overline{OC}) \cdot (\overline{DA} + \overline{AB} + \overline{BE}) = -7$$

$$\Leftrightarrow \overline{DO} \cdot \overline{DA} + \underbrace{\overline{DO} \cdot \overline{AB}}_{=0} + \overline{DO} \cdot \overline{BE} + \underbrace{\overline{OC} \cdot \overline{DA}}_{=0} + \overline{OC} \cdot \overline{AB} + \underbrace{\overline{OC} \cdot \overline{BE}}_{=0} = -7$$

$$\Leftrightarrow x \times 2x \times \cos(180^\circ) + 0 + x \times x \times \cos(0^\circ) + 0 + \frac{3}{4}x \times \frac{3}{4}x \times \cos(0^\circ) + 0 = -7,$$

$$\text{pois } \overline{DO} \perp \overline{AB}, \overline{OC} \perp \overline{DA} \text{ e } \overline{OE} \perp \overline{BE}.$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + x^2 + \frac{9}{16}x^2 = -7$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{16}x^2 = -7$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x = 4, \text{ pois } x > 0.$$

$$\text{Assim, } \overline{OA} = 3 \times 4 = 12.$$

10. Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$ e g é par (o gráfico de g é simétrico em relação ao eixo Oy), então, tem-se que $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = +\infty$, o que exclui o referencial (III) já que, na função representada, o limite da função à direita de -1 é igual a $-\infty$.

Como g é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, então g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Em particular, g é contínua em $x = 0$. Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$ e $g(0) < 0$, o que exclui o referencial (I), pois, na função representada no referencial (I), o limite quando x tende para 0, por valores à esquerda, é positivo, o que contraria o facto de $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) (< 0)$.

Como $g'(x) < 0, \forall x \in]-\infty, -1[$, então g é decrescente (em sentido estrito) em $]-\infty, -1[$, o que exclui o referencial (II), pois, nesta opção, a função representada é crescente (em sentido estrito) em $]-\infty, -1[$.

11. A é o afixo de z_1 e B é o afixo de z_2 .

$$z_1 = r e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \text{ com } r > 0$$

$$z_2 = r e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = r e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}, \text{ com } r > 0$$

$$\begin{aligned} z_1^2 \times z_2 &= \left(r e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^2 \times r e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = r^2 e^{i(\pi)} \times r e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \\ &= r^3 e^{i\left(\frac{7\pi}{6} + \pi\right)} = \\ &= r^3 \times e^{i\left(\frac{13\pi}{6}\right)} = \\ &= r^3 e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \end{aligned}$$

O afixo de $z_1^2 \times z_2$ pertence ao primeiro quadrante.

Opção (A)

$$12. \quad z = \frac{2i^{11}e^{i\alpha}}{-1 - \sqrt{3}i} = \frac{\cancel{2}(-i)e^{i\alpha}}{\cancel{2}e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}} = \frac{e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}e^{i\alpha}}{e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha - \frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$|-1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} \wedge \theta \in 3^\circ \text{Q} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = \sqrt{3} \wedge \theta \in 3^\circ \text{Q}$$

$$\theta = \frac{4\pi}{3}, \text{ por exemplo.}$$

Sabemos que $\operatorname{Re}(z) = -\operatorname{Im}(z)$, ou seja, o seu afixo pertence à bissetriz dos quadrantes pares e, como pertence ao 4º quadrante, então pertence à bissetriz do 4º quadrante.

Daqui vem que:

$$\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } \alpha \in [0, 2\pi[, \text{ então } \alpha = \frac{19\pi}{12}.$$

Cálculo auxiliar

$$11 = 4 \times 2 + 3$$

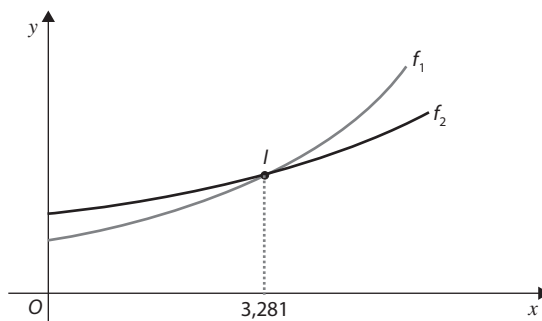
$$i^{11} = i^3 = -i$$

$$13. \quad p(2j) = p(j) + 120$$

Utilizando x como variável independente:

$$f_1(x) = \frac{62,5 \times 2x}{1 - \left(1 + \frac{2x}{1200}\right)^{-120}}$$

$$f_2(x) = \frac{62,5x}{1 - \left(1 + \frac{x}{1200}\right)^{-120}} + 120, x > 0$$



A taxa de juro anual inicial é de 3,281%.

14.

14.1 f é contínua em $\mathbb{R}^+$, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas. Logo, a reta de equação $x = 0$ é a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de função f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x) + 2x}{x} = \frac{-\infty + 0}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f (e é a única).

Como o domínio de f é limitado inferiormente, só faz sentido estudar a existência de assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\text{Limite notável}} + 2 = 0 + 2 = 2$$

A reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

14.2 $D_f =]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\ln x + 2x)' \times x - (\ln x + 2x) \times (x)'}{x^2} = \frac{\left(\frac{1}{x} + 2\right) \times x - \ln x - 2x}{x^2} = \\ &= \frac{1 + \cancel{2x} - \ln x - \cancel{2x}}{x^2} = \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad D_{f'} = \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Em $\mathbb{R}^+$:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = e$$

x	0		e	$+\infty$
$1 - \ln x$		+	0	-
x^2		+	+	+
Sinal de f'		+	0	-
Variação de f		$\nearrow$	Máx. $f(e)$	$\searrow$

Cálculo auxiliar

$$1 - \ln(1) = 1 (> 0)$$

$$1 - \ln(e^2) = 1 - 2 = -1 (< 0)$$

f é estritamente crescente em $]0, e[$.

f é estritamente decrescente em $[e, +\infty[$.

$$f(e) = \frac{\ln e + 2e}{e} = \frac{1 + 2e}{e}$$

$\frac{1 + 2e}{e}$ é máximo relativo.

15. $r = 2$

α é a inclinação da reta OT .

$$T(2\cos \alpha, 2\sin \alpha)$$

$$\overrightarrow{OT} = (2\cos \alpha, 2\sin \alpha)$$

$$AB: y = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}x + b$$

$$m_{OT} = \frac{2\sin \alpha}{2\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$T(2\cos \alpha, 2\sin \alpha)$$

$$2\sin \alpha = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}(2\cos \alpha) + b$$

$$2\sin \alpha + 2\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = b \Leftrightarrow \frac{2\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = b \Leftrightarrow \frac{2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha} = b \Leftrightarrow \frac{2}{\sin \alpha} = b$$

$$AB: y = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}x + \frac{2}{\sin \alpha}$$

$$B\left(0, \frac{2}{\sin \alpha}\right)$$

$$0 = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}x + \frac{2}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}x = \frac{2}{\sin \alpha} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\cos \alpha}$$

$$A\left(\frac{2}{\cos \alpha}, 0\right)$$

$$A_{[ABC]} = 2 \times A_{[AOB]} =$$

$$= 2 \times \frac{\frac{2}{\cos \alpha} \times \frac{2}{\sin \alpha}}{2} = \frac{4}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \times 4}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{8}{\sin(2\alpha)} \quad \text{c.q.d.}$$

$$16. \quad f(x) = \frac{k}{x}, k > 0 \quad D_f = \mathbb{R}^+ \quad f'(x) = -\frac{k}{x^2}$$

$$g(x) = -\frac{k}{x}, k > 0 \quad D_g = \mathbb{R}^+ \quad g'(x) = \frac{k}{x^2}$$

$P\left(a, \frac{k}{a}\right)$, pois o ponto P pertence ao gráfico da função f .

$Q\left(a, -\frac{k}{a}\right)$, pois o ponto Q pertence ao gráfico da função g .

$s: y = -\frac{k}{a^2}x + b \quad m_s = f'(a) = -\frac{k}{a^2}$, pois a reta s é tangente ao gráfico da função f no ponto P .

$t: y = \frac{k}{a^2}x + b' \quad m_t = g'(a) = \frac{k}{a^2}$, pois a reta t é tangente ao gráfico da função g no ponto Q .

$P\left(a, \frac{k}{a}\right)$ pertence à reta s :

$$\frac{k}{a} = -\frac{k}{a^2} \times a + b \Leftrightarrow \frac{k}{a} = -\frac{k}{a} + b \Leftrightarrow \frac{2k}{a} = b$$

$$s: y = -\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a}$$

$Q\left(a, -\frac{k}{a}\right)$ pertence à reta t :

$$-\frac{k}{a} = \frac{k}{a^2} \times a + b' \Leftrightarrow -\frac{k}{a} = \frac{k}{a} + b' \Leftrightarrow -\frac{2k}{a} = b'$$

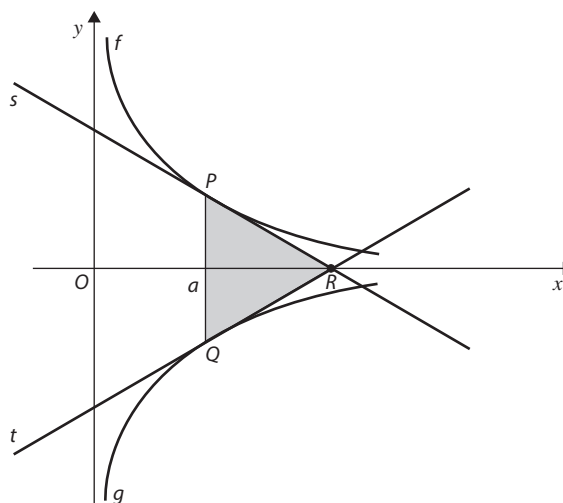
$$t: y = \frac{k}{a^2}x - \frac{2k}{a}$$

Vamos agora determinar as coordenadas do ponto R , interseção das retas s e t .

$$\begin{cases} y = -\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a} \\ y = \frac{k}{a^2}x - \frac{2k}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k}{a^2}x - \frac{2k}{a} = -\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a} \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2k}{a^2}x = \frac{2k}{a} + \frac{2k}{a} \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2k}{a^2}x = \frac{4k}{a} \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4k}{a} \times \frac{a^2}{2k} \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a \\ y = \frac{k}{a^2} \times 2a - \frac{2k}{a} \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a \\ y = \frac{2k}{a} - \frac{2k}{a} \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a \\ y = 0 \end{cases}$$

$R(2a, 0)$



$$A_{[PQR]} = \frac{(2a - a) \times \left(\frac{k}{a} + \frac{k}{a}\right)}{2} = \frac{a \times \frac{2k}{a}}{2} = \frac{2k}{2} = k$$