

$$1. \quad \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2n} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^2 = \left[\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^2 = (e^1)^2 = e^2$$

Opção (C)

2. Seja (u_n) a sucessão dos comprimentos dos segmentos de reta que constitui a linha poligonal. (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2.

$$u_1 = \overline{AB} = a \text{ cm}$$

$$u_2 = a + 2$$

$$u_3 = a + 4$$

$$u_n = a + (n - 1) \times 2 = 2n - 2 + a$$

$$u_{100} = 200 - 2 + a = 198 + a$$

$$S_{100} = 104 \Leftrightarrow \frac{a + 198 + a}{2} \times 100 = 10\,400$$

$$\Leftrightarrow (a + 99) \times 100 = 10\,400$$

$$\Leftrightarrow 100a + 9900 = 10\,400$$

$$\Leftrightarrow 100a = 500$$

$$\Leftrightarrow a = 5$$

$$3. \quad f'(x) = -2xe^{1-x^2} \quad D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = (-2x)'e^{1-x^2} + (-2x)(e^{1-x^2})' =$$

$$= -2e^{1-x^2} - 2x \times (-2x)e^{1-x^2} =$$

$$= -2e^{1-x^2} + 4x^2e^{1-x^2} =$$

$$= e^{1-x^2}(4x^2 - 2) \quad D_{f''} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x^2}(4x^2 - 2) = 0$$

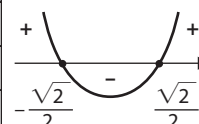
$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{1-x^2} = 0}_{\text{Equação impossível}} \vee 4x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
e^{1-x^2}	+	+	+	+	+
$4x^2 - 2$	+	0	-	0	+
Sinal de f''	+	0	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	∪	P.I.	∩	P.I.	∪



O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left] -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right[$.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

O gráfico de f tem dois pontos de inflexão de abscissas $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.

4.1. g é contínua em $x = 1$ se $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x-4}{e^{x-1}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4(x-1)}{e^{x-1}-1} = 4 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{y}{e^y-1} = 4 \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y-1}{y}} = 4 \times \frac{1}{1} = 4$$

Mudança de variável
 $\boxed{y=x-1}$
 $x \rightarrow 1^- \Rightarrow y \rightarrow 0^-$

limite notável

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (7 \times 3^{x-1} - 3) = 7 \times 1 - 3 = 4$$

$$\bullet g(1) = 7 \times 3^0 - 3 = 4$$

Logo, g é contínua em $x = 1$.

4.2. Em $[1, +\infty[$: $\log_3(g(x)) = x + \log_3 2$

$$D = \{x \in [1, +\infty[: 7 \times 3^{x-1} - 3 > 0\} = \left\{x \in [1, +\infty[: x > \log_3\left(\frac{9}{7}\right)\right\} = [1, +\infty[$$

$$\begin{aligned} 7 \times 3^{x-1} - 3 > 0 &\Leftrightarrow 7 \times 3^{x-1} > 3 \\ &\Leftrightarrow 3^{x-1} > \frac{3}{7} \\ &\Leftrightarrow x-1 > \log_3\left(\frac{3}{7}\right) \\ &\Leftrightarrow x > 1 + \log_3\left(\frac{3}{7}\right) \\ &\Leftrightarrow x > \log_3(3) + \log_3\left(\frac{3}{7}\right) \\ &\Leftrightarrow x > \log_3\left(\frac{9}{7}\right) \end{aligned}$$

$$\log_3\left(\frac{9}{7}\right) < \log_3(3), \text{ logo } \log_3\left(\frac{9}{7}\right) < 1.$$

Em $[1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = x + \log_3(2) &\Leftrightarrow \log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = \log_3(3^x) + \log_3(2) \\ &\Leftrightarrow \log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = \log_3(3^x \times 2) \\ &\Leftrightarrow 7 \times 3^{x-1} - 3 = 3^x \times 2 \\ &\Leftrightarrow -2 \times 3^x + \frac{7}{3} \times 3^x = 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 3^x = 3 \\ &\Leftrightarrow 3^x = 3^2 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

$$C.S. = \{2\}$$

5.

5.1.

A
D
F

$$3! \times 8! = 241\,920$$

Opção (B)

5.2. Consideremos os acontecimentos A e B definidos por:

A : "O jovem respondeu que praticava *surf*."

B : "O jovem respondeu que praticava *skate*."

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,65$

- $P(\bar{A} \cap B) = 0,20$

- $P(B | A) = \frac{4}{5}$

$$P(B | A) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{5} \times P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{5} \times 0,65$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,52$$

Pretende-se determinar $P(A | \bar{B})$.

$$P(A | \bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

Organizando os dados numa tabela:

	B	$\bar{B}$	Total
A	0,52		0,65
$\bar{A}$	0,2		
Total			

$$P(A \cap \bar{B}) = 0,65 - 0,52 = 0,13$$

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,65 = 0,35$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,35 - 0,2 = 0,15$$

$$P(\bar{B}) = 0,28$$

	B	$\bar{B}$	Total
A	0,52	0,13	0,65
$\bar{A}$	0,2	0,15	0,35
Total		0,28	1

$$\text{Assim, } P(A | \bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,13}{0,28} = \frac{13}{28}.$$

5.3. $n \rightarrow$ número de jovens com 13 anos.

$70 - n \rightarrow$ número de jovens com 14 anos.

$$70 - n > n \Leftrightarrow 70 > 2n \Leftrightarrow n < 35$$

$$\frac{n \times (70 - n)}{{}^{70}C_2} = \frac{16}{35} \Leftrightarrow \frac{70n - n^2}{2415} = \frac{16}{35}$$

$$\Leftrightarrow 70n - n^2 = \frac{16 \times 2415}{35}$$

$$\Leftrightarrow 70n - n^2 = 1104$$

$$\Leftrightarrow -n^2 + 70n - 1104 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-70 \pm \sqrt{4900 - 4 \times (-1) \times (-1104)}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-70 \pm \sqrt{484}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-70 \pm 22}{-2}$$

$$\Leftrightarrow n = 46 \vee n = 24$$

Como $n < 35$, então $n = 24$.

Há 24 jovens com 13 anos.

6. Sabe-se que $\overline{OE} = 12,5$ e que a reta AC é definida por $(x, y, z) = (10, 0, 0) + k(0, 4, 3)$, $k \in \mathbb{R}$.

6.1. Como as retas AC e OD são paralelas, então o vetor de coordenadas $(0, 4, 3)$ é um vetor diretor da reta OD .

(A) $\left(0, 2, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \times (0, 4, 3)$

Averiguemos se o ponto O pertence à reta:

$$(0, 0, 0) = (0, 6, 8) + k \left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 6 + 2k \\ 0 = 8 + \frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ \frac{3}{2}k = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = -\frac{16}{3} \end{cases} \quad \text{Condição impossível}$$

(B) $\left(0, 2, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \times (0, 4, 3)$

Averiguemos se o ponto O pertence à reta:

$$(0, 0, 0) = (0, -4, -3) + k \left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = -4 + 2k \\ 0 = -3 + \frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ \frac{3}{2}k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \end{cases}$$

(C) Os vetores de coordenadas $(0, 3, -4)$ e $(0, 4, 3)$ não são colineares.

(D) Os vetores de coordenadas $(0, 3, -4)$ e $(0, 4, 3)$ não são colineares.

Opção (B)

6.2. 1º Processo

$$E(0; 12,5; 0)$$

Sabe-se que $AC \perp CB$, pois o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B .

Sabe-se que $AC \perp CD$, pois $[CD]$ é a altura do prisma triangular reto.

AC é perpendicular ao plano BCD .

Logo, uma equação do plano BCD é do tipo $4y + 3z + d = 0$.

Como o ponto E pertence ao plano:

$$4 \times 12,5 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -50$$

$$BCD: 4y + 3z - 50 = 0$$

O ponto C é a interseção da reta AC com o plano BCD :

$(10, 4k, 3k)$, $k \in \mathbb{R}$ é um ponto genérico da reta AC :

$$4 \times 4k + 3 \times 3k - 50 = 0 \Leftrightarrow 25k = 50$$

$$\Leftrightarrow k = 2$$

$$k = 2 \curvearrowright C(10, 8, 6)$$

2º Processo

As coordenadas do ponto A são $(10, 0, 0)$.

As coordenadas do ponto B são $(10; 12,5; 0)$.

Como C pertence à reta AC , as coordenadas do ponto C são de forma $(10, 4k, 3k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Como o triângulo $[ABC]$ está inscrito numa semicircunferência de diâmetro $[AB]$, os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ são perpendiculares, logo $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

$$\overrightarrow{AC} = (10, 4k, 3k) - (10, 0, 0) = (0, 4k, 3k)$$

$$\overrightarrow{BC} = (10, 4k, 3k) - (10; 12,5; 0) = (0; 4k - 12,5; 3k)$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (0, 4k, 3k) \cdot (0; 4k - 12,5; 3k) = 0$$

$$\Leftrightarrow 16k^2 - 50k + 9k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25k^2 - 50k = 0$$

$$\Leftrightarrow k(25k - 50) = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = 2$$

Como C não pertence ao eixo Ox , então $k \neq 0$. Logo, $k = 2$.

$$k = 2 \curvearrowright C(10, 8, 6)$$

3º Processo

As coordenadas do ponto A são $(10, 0, 0)$.

As coordenadas do ponto B são $(10; 12,5; 0)$.

Como C pertence à reta AC , as suas coordenadas são da forma $(10, 4k, 3k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

C pertence à superfície esférica de diâmetro $[AB]$ definida pela equação

$$(x - 10)^2 + \left(y - \frac{25}{4}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2.$$

Logo:

$$\begin{aligned} 0^2 + \left(4k - \frac{25}{4}\right)^2 + (3k)^2 &= \left(\frac{25}{4}\right)^2 \Leftrightarrow 16k^2 - 50k + \frac{625}{16} + 9k^2 = \frac{625}{16} \\ &\Leftrightarrow 25k^2 - 50k = 0 \\ &\Leftrightarrow k(25k - 50) = 0 \\ &\Leftrightarrow k = 0 \vee k = 2 \end{aligned}$$

Como C não pertence ao eixo Ox, então $k \neq 0$. Logo, $k = 2$.

$$k = 2 \rightarrow C(10, 8, 6)$$

$$\begin{aligned} 7. \quad \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= 3 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{OP}\| \times \|\overrightarrow{OQ}\| \times \cos(\widehat{OP, OQ}) = 3 \\ &\Leftrightarrow 2 \times 2 \times \cos(2(\alpha - \pi)) = 3 \\ &\Leftrightarrow 4 \cos(2\alpha - 2\pi) = 3 \\ &\Leftrightarrow 4 \cos(2\alpha) = 3 \\ &\Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$Q(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$$

$$P(2\cos\alpha, -2\sin\alpha)$$

$$8. \quad a(t+3) - a(t) = 25, 0 \leq t \leq 5$$

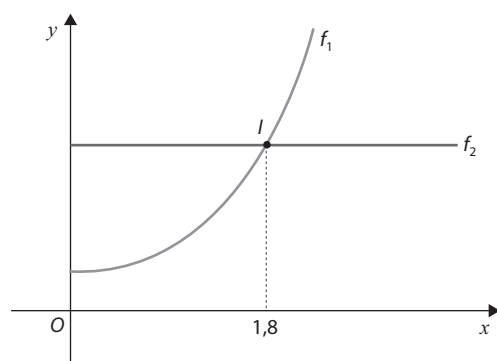
Cálculo auxiliar

$$0 \leq t+3 \leq 8$$

$$-3 \leq t \leq 5$$

Utilizando x como variável independente:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 100 \left(x + 3 + (10 - x - 3) \ln \left(1 - \frac{x+3}{10} \right) \right) - 4,9(x+3)^2 - 100 \left(x + (10 - x) \ln \left(1 - \frac{x}{10} \right) \right) - 4,9x^2 \\ f_2(x) &= 25 \end{aligned}$$



Assim, $t \approx 1,8$ s.

$$\begin{aligned} 9. \quad D_f &= \mathbb{R} \\ D_g &= \mathbb{R}^+ \\ r: y &= 2x - 1 \end{aligned}$$

I. A afirmação é falsa.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x - 1)) = 0$, então o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua quando $x \rightarrow +\infty$ de equação $y = 2x - 1$, pelo que não existe assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

II. A afirmação é falsa.

Como a reta de equação $y = 2x - 1$ é tangente ao gráfico de g em $x = 1$, $g(1) = 2 - 1 = 1$ e, como g é diferenciável, então g é contínua em $x = 1$, logo $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 1$.

III. A afirmação é falsa.

Se o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima, então $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Se o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo, então $g''(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Logo, $g''(x) \leq f''(x), \forall x \in]0, +\infty[$, o que contradiz a afirmação $f''(x) < g''(x), \forall x \in]0, +\infty[$.

10. Um argumento de z é $\frac{\pi}{4}$.

Um argumento de w é $\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$.

Um argumento de $w \times z$ é $\frac{7\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{8}$.
($\times 2$)

Opção (C)

$$\begin{aligned} 11. \quad w &= \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}} - i^{17}}{i} = \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i}{i} = \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - i}{i} = \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{i} = \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}}{-1} = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$$17 = 4 \times 4 + 1$$

$$i^{17} = i^1 = i$$

$$|w| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \wedge \alpha \in 2^\circ \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3} \wedge \alpha \in 2^\circ \mathbb{Q}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \text{ por exemplo.}$$

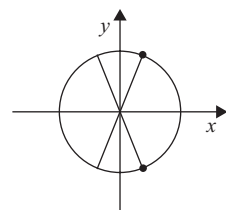
$$z^2 = 1e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Pretendemos determinar as raízes quadradas do número $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ que são da forma:

$$z_k = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{2}\right)}, k \in \{0, 1\}$$

$$k = 0 \rightarrow z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 1 \rightarrow z_1 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



12.

12.1. $f(x) = \sin(2x) + x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x)' \cos(2x) + x' = \\ &= 2 \cos(2x) + 1 = \\ &= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1 = \\ &= 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x + 1 = \\ &= 2(1 - \sin^2 x) - 2 \sin^2 x + 1 = \\ &= 2 - 2 \sin^2 x - 2 \sin^2 x + 1 = \\ &= -4 \sin^2 x + 3 = \\ &= 3 - 4 \sin^2 x \end{aligned}$$

Opção (D)

12.2. $f(x) = -x + 2 \Leftrightarrow f(x) + x - 2 = 0$

Seja g a função, de domínio $[0, \pi]$, definida por $g(x) = f(x) + x - 2$, ou seja, $g(x) = \sin(2x) + 2x - 2$. g é contínua, por se tratar da soma de duas funções contínuas (uma função trigonométrica e uma função polinomial). Em particular, g é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \frac{2\pi}{6} - 2 = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} - 2 = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}}_{\approx -0,452802} - 2 < 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3} - 2 = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}}_{\approx 0,960421} - 2 > 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0 < g\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] : g(c) = 0, \text{ isto é, } \exists c \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] : f(c) + c - 2 = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] : f(c) = -c + 2$$

Logo, o gráfico da função f interseca a reta r em, pelo menos, um ponto de abscissa pertencente ao intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

13. $f(x) = ax^2 + bx$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(x) = a \Leftrightarrow 2ax + b = a \Leftrightarrow 2ax = a - b \Leftrightarrow x = \frac{a - b}{2a}$$

• T pertence à reta definida por $y = ax + b$, logo:

$$y = a \times \frac{a - b}{2a} + b = \frac{a - b}{2} + b = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{2b}{2} = \frac{a + b}{2} \quad T\left(\frac{a - b}{2a}, \frac{a + b}{2}\right)$$

• T pertence ao gráfico de f :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a - b}{2a}\right) &= a \left(\frac{a - b}{2a}\right)^2 + b \left(\frac{a - b}{2a}\right) = \\ &= a \times \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4a^2} + \frac{ab - b^2}{2a} = \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4a} + \frac{ab - b^2}{2a} = \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2 - \cancel{2ab} + b^2 + \cancel{2ab} - 2b^2}{4a} =$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{4a}$$

$$T\left(\frac{a-b}{2a}, \frac{a^2-b^2}{4a}\right)$$

Logo:

$$\frac{a^2-b^2}{4a} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2-b^2}{4a} = \frac{2a^2+2ab}{4a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4a} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 = 0 \wedge \underbrace{4a \neq 0}_{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

$$\Leftrightarrow a+b=0$$

$$\Leftrightarrow a=-b$$

Então:

$$T\left(\frac{-b-b}{2(-b)}, \frac{-b+b}{2}\right), \text{ ou seja, } T\left(\frac{-2b}{-2b}, 0\right), \text{ isto é, } T(1, 0).$$